

Городские кружки в ЦПМ

Летние сборы, июнь 2026, 9 класс

Материалы занятий

Содержание

I	Материалы группы 9-1	3
1	Алгебра	4
	Симметрические многочлены: теория	5
	Симметрические многочлены: задачи	7
	Однородные симметрические неравенства: Мюрхед	8
	Однородные симметрические неравенства: Шур.	10
	<i>pqr</i> -метод lite	11
2	Геометрия	12
	Двойное отношение	13
	Двойное отношение. Добавка	15
	Двойные отношения на окружности	16
	Добавка	18
	Добавка	19
	Поляры	20
3	Комбинаторика	22
	Соответствия	23
	Добавка	24
	Рекурренты	25
	Рекурренты-2	26
	ЧУМы	27
	Упорядочивание	29
II	Материалы группы 9-2	30
4	Алгебра	31
	Симметрические многочлены: теория	32
	Симметрические многочлены: задачи	34
	Однородные симметрические неравенства: Мюрхед	35
	Однородные симметрические неравенства: Шур.	37
	<i>pqr</i> -метод lite	38
5	Геометрия	39

Двойное отношение	40
Двойное отношение. Добавка	42
Двойные отношения на окружности	43
Добавка	45
Добавка	46
Поляры	47
6 Комбинаторика	49
Соответствия	50
Добавка	51
Рекурренты	52
Рекурренты-2	53
ЧУМы	54
Упорядочивание	56
 III Материалы группы 9-3	 57
7 Алгебра	58
Симметрические многочлены: теория	59
Симметрические многочлены: задачи	60
Однородные симметрические неравенства: Мюрхед	61
Однородные симметрические неравенства: Шур.	63
<i>pqr</i> -метод lite	64
8 Геометрия	65
Двойное отношение	66
Двойное отношение. Добавка	68
Двойные отношения на окружности	69
Добавка	71
Добавка	72
Поляры	73
Полярное преобразование	75
9 Комбинаторика	76
Соответствия	77
Добавка	78
Рекурренты	79
Рекурренты-2	80
ЧУМы	81
Упорядочивание	83

Часть I

Материалы группы 9-1

Симметрические многочлены: теория

Многочлен $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется **симметрическим**, если он не меняется при любой перестановке аргументов $x_1, \dots, x_n$.

Элементарными симметрическими многочленами $\sigma_k(x_1, \dots, x_n)$ называются многочлены

$$\sigma_k(x_1, \dots, x_n) := \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}.$$

Например, $\sigma_1(x_1, \dots, x_n) = x_1 + \dots + x_n$ и $\sigma_n(x_1, \dots, x_n) = x_1 x_2 \dots x_n$.

1. Выразите через элементарные симметрические многочлены от x, y, z

(а) $x^3 + y^3 + z^3$;

(б) $x^2 y + y^2 z + z^2 x + x y^2 + y z^2 + z x^2$;

(в) $x^3 y^3 + y^3 z^3 + z^3 x^3$.

Основная теорема о симметрических многочленах. Любой симметрический многочлен можно единственным образом представить в виде многочлена от элементарных симметрических многочленов.

Моном $a x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$ считается **лексикографически больше** монома $b x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \dots x_n^{\beta_n}$, если существует такой индекс $m \leq n$, что $\alpha_i = \beta_i$ для всех $i < m$ и $\alpha_m > \beta_m$.

Ненулевой моном многочлена P называется **старшим**, если он лексикографически больше любого другого ненулевого монома многочлена P .

2. (а) Докажите, что старший моном произведения двух многочленов равен произведению старших мономов этих многочленов.

(б) Докажите, что для любого монома $q = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$ такого, что $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_n$, есть единственный набор чисел $\beta_1, \dots, \beta_n \geq 0$ такой, что старший моном многочлена $\sigma_1^{\beta_1} \sigma_2^{\beta_2} \dots \sigma_n^{\beta_n}$ совпадает с q .

(в) Докажите основную теорему о симметрических многочленах.

3. (а) Дан многочлен $P(x)$ степени n с рациональными коэффициентами. Пусть $a_1, a_2, \dots, a_n$ — его корни (возможно, комплексные). Также дан симметрический многочлен $Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$ с рациональными коэффициентами. Докажите, что число $Q(a_1, a_2, \dots, a_n)$ рационально.

(б) Про P известно, что он приведенный, имеет целые коэффициенты, а симметрический многочлен Q также имеет целые коэффициенты. Докажите, что число $Q(a_1, a_2, \dots, a_n)$ целое.

4. (а) Докажите по индукции по n , что если многочлен $P(x_1, \dots, x_n)$ при любых значениях $x_1, \dots, x_n$ равен нулю, то P — нулевой многочлен.

(б) Докажите, что если значение многочлена $P(x_1, \dots, x_n)$ не меняется при любой перестановке аргументов, то многочлен P является симметрическим.

5. Многочлен $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ от n переменных называется *кососимметрическим*, если он меняет знак при транспозиции любых двух переменных. Положим

$$\Delta(x_1, \dots, x_n) := \prod_{i < j} (x_i - x_j).$$

Докажите, что P представим в виде

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n) = \Delta(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot Q(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

где Q — некоторый симметрический многочлен.

6. Многочлен $x^{2026} + y^{2026}$ выразили через элементарные симметрические как $P(x + y, xy)$. Найдите сумму коэффициентов многочлена P .
7. Про вещественные числа $a < b < c$ и $x < y < z$ известно, что $a + b + c = x + y + z$, $a^2 + b^2 + c^2 = x^2 + y^2 + z^2$ и что $a < x$. Докажите, что $c < z$.

Симметрические многочлены: задачи

- (а) Юлий Васильевич загадал три числа, после чего сообщил Юрию Германовичу их сумму, сумму квадратов и сумму кубов. Сможет ли Юрий Германович восстановить исходные числа?

(б) А Евгению Сергеевичу Юлий Васильевич сообщил сумму чисел, сумму квадратов и сумму четвёртых степеней. Сможет ли Евгений Сергеевич восстановить исходные числа?

(в) А если Юлий Васильевич загадает n чисел и сообщит их сумму, сумму их квадратов, сумму кубов, $\dots$, сумму n -х степеней?
- В таблицу 3×3 записано девять чисел. Известно, что шесть чисел — суммы строк и суммы столбцов таблицы — равны между собой. Докажите, что сумма произведений строк таблицы равна сумме произведений её столбцов.
- Докажите, что сумма 2026 -х степеней всех чисел вида

$$1 \pm \sqrt{2} \pm \dots \pm \sqrt{2026}$$

является целым числом.

Однородные симметрические неравенства: Мюрхед

Определение. Пусть дан набор целых неотрицательных чисел $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, такой что $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_n$. Введём обозначение следующего симметрического многочлена от переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$:

$$T_\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{sym} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n},$$

где суммирование ведётся по всем возможным перестановкам переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Примеры.

- $T_{(2,1,0)}(x, y, z) = x^2y + xy^2 + y^2z + yz^2 + z^2x + xz^2$;
- $T_{(1,1,1)}(x, y, z) = 6xyz$;
- $T_{(1,1,0)}(x, y, z) = 2xy + 2yz + 2zx$.

Ещё определение. Пусть даны два набора целых неотрицательных чисел $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ и $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$, такие что $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_n$, $\beta_1 \geq \beta_2 \geq \dots \geq \beta_n$ и $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n$. Тогда будем говорить, что α *мажорирует* β (обозначается как $\alpha \succ \beta$), если для любого $1 \leq k \leq n$ верно

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i \geq \sum_{i=1}^k \beta_i.$$

Неравенство Мюрхеда. Пусть $\alpha \succ \beta$. Тогда для любых неотрицательных $x_1, x_2, \dots, x_n$ верно:

$$T_\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq T_\beta(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Дружеский совет. Если у вас неоднородное неравенство, то сделайте его однородным.

1. Для неотрицательных чисел x, y, z докажите неравенство

$$(x+y)(y+z)(z+x) + xyz \leq 3(x^3 + y^3 + z^3).$$

2. Для неотрицательных чисел x, y, z , таких что $x+y+z = 1$, докажите неравенство

$$1 + x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz \geq 4(xy + yz + zx).$$

3. Для неотрицательных чисел x, y, z , таких что $x^2 + y^2 + z^2 = 3$, докажите неравенство

$$x + y + z \geq xy + yz + zx.$$

4. Для положительных a, b, c, d докажите неравенство

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{4}} \geq \sqrt[3]{\frac{abc + bcd + cda + dab}{4}}.$$

5. Для неотрицательных чисел a, b, c верно $a + b + c = ab + bc + ac$. Докажите, что

$$a + b + c + 1 \geq 4abc.$$

6. Для положительных чисел a, b и c , удовлетворяющих условию $a + b + c = 1$, докажите неравенство

$$\frac{1+a}{1-a} + \frac{1+b}{1-b} + \frac{1+c}{1-c} \leq 2 \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \right).$$

7. Сумма положительных чисел a, b, c равна 1. Докажите, что

$$\frac{1}{a+bc} + \frac{1}{b+ca} + \frac{1}{c+ab} \geq \frac{7}{1+abc}.$$

Однородные симметрические неравенства: Шур.

Неравенство Шура. Для положительных x, y, z и натурального n верно

$$\sum_{sym} x^{n+2} + \sum_{sym} x^n yz \geq 2 \sum_{sym} x^{n+1} y.$$

В частности при $n = 1$:

$$x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \geq x^2y + xy^2 + y^2z + yz^2 + z^2x + xz^2.$$

Творческая задача №0. Докажите неравенство Шура.

1. Для неотрицательных чисел x, y, z , таких что $x + y + z = 1$, докажите неравенство

$$1 + 9xyz \geq 4(xy + yz + zx).$$

2. Для $x, y, z \geq 0$, таких что $x + y + z = 1$, докажите неравенство

$$xy + yz + zx - 2xyz \leq \frac{7}{27}.$$

3. Для положительных чисел a, b и c докажите неравенство

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq \frac{a+b}{c+a} + \frac{b+c}{a+b} + \frac{c+a}{b+c}.$$

4. Для положительных чисел a, b, c докажите неравенство

$$108 \cdot (ab + bc + ca) \leq \left(\sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a} \right)^4.$$

5. Сумма положительных чисел x, y, z равна 1. Докажите, что

$$\left(\frac{x-yz}{x+yz} \right)^2 + \left(\frac{y-zx}{y+zx} \right)^2 + \left(\frac{z-xy}{z+xy} \right)^2 \geq \frac{3}{4}.$$

6. Для положительных a, b, c, d докажите, что

$$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + 2abcd \geq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2d^2 + d^2a^2 + a^2c^2 + b^2d^2.$$

pqr -метод lite

Для данных $a, b, c \geq 0$ положим $p := a + b + c$, $q := ab + bc + ca$, $r := abc$.

Будем фиксировать p, q и варьировать r так, чтобы переменные a, b, c оставались неотрицательными.

Теорема. (i) Число r принимает наибольшее значение, когда $a = b \leq c$.

(ii) Число r принимает наименьшее значение, когда $a = 0$ или $a \leq b = c$.

Пример. Доказать для неотрицательных a, b, c таких, что $a + b + c = ab + bc + ca$, неравенство

$$a + b + c + 1 \geq 4abc.$$

Набросок решения. Зафиксируем $p = q$. Неравенство относительно p, q, r записывается как $p + 1 \geq 4r$. Поскольку неравенство линейно относительно r , достаточно проверить крайний случай — когда r наибольшее. Таким образом, можно считать, что $a = b$, а для таких a, b, c неравенство верно (далее должна идти проверка).

1. Докажите теорему.
2. Для неотрицательных чисел a, b, c с суммой 3 докажите, что

$$\frac{1}{9 - ab} + \frac{1}{9 - bc} + \frac{1}{9 - ca} \leq \frac{3}{8},$$

если (а) $a = b$; (б) в общем случае, используя пункт (а).

3. Для положительных чисел a, b, c докажите, что

$$\frac{1}{a^2 + b^2} + \frac{1}{b^2 + c^2} + \frac{1}{c^2 + a^2} \geq \frac{10}{(a + b + c)^2}.$$

4. Для неотрицательных чисел a, b, c таких, что $ab + bc + ca = 1$, докажите, что

$$\frac{1}{(a + b)^2} + \frac{1}{(b + c)^2} + \frac{1}{(c + a)^2} \geq \frac{9}{4}.$$

5. Для неотрицательных чисел a, b, c докажите, что

$$a^5 + b^5 + c^5 + abc(ab + bc + ca) \geq a^2b^2(a + b) + b^2c^2(b + c) + c^2a^2(c + a).$$

6. Для чисел $a, b, c \geq 1$ с суммой 9 докажите, что $\sqrt{ab + bc + ca} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$.

7. Для чисел $a, b, c, d > 0$, в сумме дающих 3, докажите, что

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2} \leq \frac{1}{a^2b^2c^2d^2}.$$

2 Геометрия

Двойное отношение

Двойным отношением четвёрки точек A, B, C, D , лежащих на одной прямой, называется число

$$(A, B; C, D) = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} : \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}}.$$

А именно, это отношение отношений, в которых точки C и D делят отрезок AB .

Двойным отношением прямых a, b, c, d , пересекающихся в одной точке, называется число

$$(a, b; c, d) = \frac{\sin \angle(\vec{a}, \vec{c})}{\sin \angle(\vec{c}, \vec{b})} : \frac{\sin \angle(\vec{a}, \vec{d})}{\sin \angle(\vec{d}, \vec{b})},$$

где $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ — произвольные векторы, направленные вдоль соответствующих прямых, $\angle(\vec{a}, \vec{b})$ — ориентированный угол (с точностью до 2π).

Утверждение. Прямые a, b, c, d пересекаются в одной точке, прямая ℓ пересекает их в различных точках A, B, C, D соответственно. Тогда $(a, b; c, d) = (A, B; C, D)$.

Четвёрка точек или прямых называется *гармонической*, если их двойное отношение равно -1 . Примеры:

- A, B, M, ∞ , где M — середина отрезка AB ;
- B, C, A_1, A_2 , где AA_1, BB_1, CC_1 — чевианы, пересекающиеся в одной точке, A_2 — точка пересечения прямых B_1C_1 и BC .

Утверждение. Про точки A, B, C, D, D_1 , лежащие на одной прямой, известно, что $(A, B; C, D) = (A, B; C, D_1)$. Тогда $D = D_1$.

1. Известно, что $(A, B; C, D) = \lambda$. Найдите $(B, A; C, D)$, $(A, B; D, C)$ и $(A, C; B, D)$. Осознайте, что с помощью этого можно найти двойное отношение для любой перестановки точек.
2. Докажите, что следующие четвёрки гармонические:
 - (а) a, b, c, d , где прямые c и d — внутренняя и внешняя биссектрисы угла между прямыми a и b ;
 - (б) такие точки A, B, C, D , что для середины M отрезка AB выполнено равенство $MA^2 = \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD}$.
3. Прямые a, b, c, d пересекаются в одной точке. Докажите, что если $c \perp d$ и $(a, b; c, d) = -1$, то c и d — биссектрисы углов, образованных прямыми a и b .
4. Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке R , продолжения сторон AB и CD — в точке P , а продолжения сторон BC и AD — в точке Q .
 - (а) Прямая, проходящая через точку R , пересекает прямые AB, BC, CD, DA в точках M, X, N, Y . Докажите, что R делит пополам отрезок MN тогда и только тогда, когда R делит пополам отрезок XY .

- (б) Обозначим через T проекцию точки R на прямую PQ . Докажите, что противоположные стороны четырёхугольника видны из точки T под равными углами.
5. В треугольнике ABC проведена биссектриса AL и биссектриса внешнего угла AN . Точка M — середина стороны AC , P — точка пересечения прямых AB и ML . Докажите, что $PA = PN$.
6. Пусть H_a и L_a — основание высоты и биссектрисы треугольника ABC , проведённых из вершины A ; вписанная и внеписанная окружности касаются стороны BC в точках K_a и T_a соответственно.
- (а) Докажите, что $(H_a, L_a; K_a, T_a) = -1$;
- (б) Пусть I и I_a — центр вписанной и внеписанной окружностей треугольника ABC . Докажите, что прямые H_aI и H_aI_a симметричны относительно прямой BC .
- (в) Определим аналогично точки H_b, L_b, K_b, T_b . Докажите, что прямые $H_aH_b, L_aL_b, T_aT_b, K_aK_b$ пересекаются в одной точке.
7. В треугольнике ABC высоты BB_1 и CC_1 пересекаются в точке H , точка M — середина стороны BC , а X — точка пересечения внутренних касательных к окружностям, вписанным в треугольники BMC_1 и $СMB_1$. Докажите, что точки X, M и H лежат на одной прямой.
8. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Точки Q, A, B, P лежат на одной прямой именно в таком порядке. Прямая AC касается окружности (ADQ) , а прямая BD касается окружности (BCP) . Точки M и N — середины сторон BC и AD соответственно. Докажите, что следующие касательная к (ANQ) в точке A , касательная к (BMP) в точке B пересекаются на прямой CD .

Двойное отношение. Добавка

1. В треугольнике ABC отметили середину M стороны AB . Вторую точку пересечения BC с описанной окружностью треугольника AMC обозначим за X . Рассмотрим также окружность ω , касающуюся AC в точке C и проходящую через X . Далее, прямая XM пересекает ω в точке Z и AC в точке Y так, что A лежит между C и Y). Докажите, что AX , BY , CZ проходят через одну точку.
2. На сторонах AB , AC , BC , BC треугольника ABC отмечены точки B' , C' , P , Q соответственно. AP , AQ симметричны относительно биссектрисы угла A , $B'C' \parallel BC$. AP , AQ пересекают $B'C'$ в точках P' , Q' . Пусть X и Y — точки пересечения пар прямых BP' и QC' , PB' и CQ' соответственно. Докажите, что XY касается описанной окружности треугольника ABC .

Двойные отношения на окружности

Определение. *Двойным отношением* $(A, B; C, D)$ различных точек A, B, C, D , лежащих на одной окружности, называют величину $(PA, PB; PC, PD)$, где P — произвольная точка той же окружности.

Эта величина не зависит от выбора точки P . Точка P может совпадать с одной из точек A, B, C, D , тогда соответствующая секущая вырождается в касательную к окружности.

Утверждение. При инверсии сохраняется двойное отношение четырёх точек, лежащих на обобщённой окружности.

Из этого следует, что двойное отношение сохраняется при проекции с окружности на себя: если через точку P проведены четыре секущие, пересекающие окружность в точках A и A_1 , B и B_1 , C и C_1 , D и D_1 , то $(A, B; C, D) = (A_1, B_1; C_1, D_1)$ (но оно не обязательно равно двойному отношению прямых PA, PB, PC, PD).

Определение. Вписанный четырёхугольник $ABCD$ называется *гармоническим*, если $(A, C; B, D) = -1$.

1. Из точки P провели касательные PX и PY к окружности ω и секущую, которая пересекла ω в точках A и B , а прямую XY — в точке C . Докажите, что
(а) $(A, B; X, Y) = -1$; (б) $(A, B; C, P) = -1$.
2. Биссектриса внутреннего угла при вершине A треугольника ABC пересекает (ABC) в точке D , а биссектриса внешнего угла пересекает BC в точке E . Симедиана, поведённая из вершины A , пересекает (ABC) в точке L . Докажите, что D, E, L лежат на одной прямой.
3. Дан треугольник ABC и точка M . Прямая, проходящая через M , пересекает AB, BC, CA в C_1, A_1, B_1 соответственно. Прямые AM, BM, CM пересекают окружность (ABC) в точках A_2, B_2, C_2 соответственно. Докажите, что A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 пересекаются в одной точке, лежащей на (ABC) .
4. (а) **Теорема о бабочке.** Хорды AC и BD окружности ω проходят через середину хорды MN . Отрезки AD и BC пересекают отрезок MN в точках X и Y . Докажите, что $XM = YN$.
(б) **Теорема о двойной бабочке.** На хорде MN окружности ω отмечены точки M_1 и N_1 такие, что $MM_1 = NN_1$. Хорда AC проходит через точку M_1 , а хорда BD — через точку N_1 . Отрезки AD и BC пересекают MN в точках X и Y соответственно. Докажите, что $XM = YN$.
5. Окружности $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ касаются друг друга внешним образом по циклу. Окружность ω касается их всех внешним образом в точках X_1, X_2, X_3, X_4 соответственно. Докажите, что $X_1X_2X_3X_4$ образуют гармонический четырёхугольник.

6. Из точки P вне окружности ω проведены касательные PX и PY и две секущие, пересекающие окружность в точках A и B , C и D . Докажите, что точки пересечения прямых AC и BD , AD и BC лежат на прямой XY .
7. Окружность проходит через вершины B и C треугольника ABC и повторно пересекает отрезки AB и AC в точках C_1 и B_1 соответственно. Отрезки BB_1 и CC_1 пересекаются в точке P , прямая AP пересекает отрезок BC в точке A_1 . Докажите, что окружность $(A_1B_1C_1)$ проходит через середину отрезка BC .
8. Докажите, что точка Лемуана треугольника ABC (т. е. точка пересечения симедиан) лежит на прямой, соединяющей середину высоты из вершины A с серединой стороны BC .
9. Биссектрисы углов B и C треугольника ABC пересекаются в точке I и пересекают окружность (ABC) в точках B_1 и C_1 соответственно. Точка D — середина дуги BAC . Окружности ω_b и ω_c касаются прямых AB и AC соответственно и окружности (ABC) внутренним образом в точках B_1 и C_1 соответственно. Докажите, что прямая, проходящая через точки пересечения ω_b и ω_c , пересекается с прямой DI на (ABC) .

Добавка

1. Четырёхугольник $ABCD$ описан около окружности, лучи BA и CD пересекаются в точке E , лучи BC и AD — в точке F . Вписанная окружность треугольника, образованного прямыми AB , CD и биссектрисой угла B , касается прямой AB в точке K , а вписанная окружность треугольника, образованного прямыми AD , BC и биссектрисой угла B , касается прямой BC в точке L . Докажите, что прямые KL , AC и EF пересекаются в одной точке.
2. Внутри треугольника ABC на биссектрисе угла A выбрана произвольная точка J . Лучи BJ и CJ пересекают стороны AC и AB в точках K и L соответственно. Касательная к окружности (AKL) в точке A пересекает прямую BC в точке P . Докажите, что $PA = PJ$.
3. В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC проведены высоты BH_B , CH_C и биссектрисы BL_B , CL_C . Точки I_B , I_C — центры вневписанных окружностей напротив вершин B и C соответственно, точка O — центр описанной окружности. Прямые I_BH_C и I_CH_B пересекаются в точке X . Докажите, что $OX \perp L_BL_C$.

Добавка

1. Вписанная окружность ω треугольника ABC с центром в I касается сторон AC и AB в точках E и F соответственно. Пусть M и N — точки пересечения EF с (ABC) , причём M лежит на «малой дуге» AB . Пусть S — точка пересечения касательных к (ABC) в точках A и M . Касательные из M к ω повторно пересекают Ω в точках L и K . Пусть R — точка пересечения EF и KL , а T — пересечение касательных к (ABC) в точках B и C . Докажите, что I — инцентр треугольника RST .
2. В четырёхугольник $ABCD$ вписана окружность с центром в I . Докажите, что ортоцентры треугольников ABI , BCI , CDI и DAI лежат на одной прямой, проходящей через точку пересечения диагоналей $ABCD$.

Поляры

Определение. Дана окружность ω с центром O и точка P . *Полярной* точки P относительно ω называется прямая ℓ , которая проходит через инверсную точку P' перпендикулярно прямой OP . Точка P называется *полюсом* прямой ℓ .

Полюсом бесконечно удалённой прямой будем считать центр окружности. Полюсом прямой ℓ , проходящей через центр ω , будем считать бесконечно удалённую точку, соответствующую перпендикулярному ℓ направлению.

Таким образом, мы задали биекцию между точками и прямыми на проективной плоскости. Замена точек на соответствующие им прямые и наоборот называется *полярным преобразованием*.

- Если точка P лежит вне ω , то её полярна — это прямая XY , где PX и PY — касательные к ω .
 - Если A лежит на поляре B , то B лежит на поляре A .
 - Через точку P проведена секущая, пересекающая окружность ω в точках A и B , а её полярю — в точке C . Тогда $(A, B; C, P) = -1$.
 - Пусть через точки P проведены две секущие, пересекающие окружность в точках A и B , C и D . Тогда точки пересечения прямых AC и BD , AD и BC лежат на поляре точки P относительно ω .
 - Точки A, B, C лежат на одной прямой $\iff$ их полярны a, b, c пересекаются в одной точке.
1. Четырёхугольник вписан в окружность с центром O . Обозначим точки пересечения противоположных сторон и точку пересечения диагоналей четырёхугольника через P, Q и R . Докажите, что O — ортоцентр треугольника PQR .
 2. На окружности даны точки A, B, C, X и Y . Прямые AX и BY пересекаются в точке C_1 , а прямые AY и BX — в точке C_2 . Аналогично определяются точки B_1, B_2 и A_1, A_2 . Докажите, что прямые A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 пересекаются в одной точке.
 3. (а) Вписанная окружность описанного четырёхугольника $ABCD$ касается его сторон AB, BC, CD, DA в точках K, L, M, N соответственно. Прямые AB и CD пересекаются в точке P , прямые AD и BC — в точке Q , прямые KL и MN — в точке R , прямые KN и LM — в точке S . Докажите, что P, Q, R, S лежат на одной прямой.
(б) Докажите, что в описанном четырёхугольнике точка пересечения диагоналей совпадает с точкой пересечения диагоналей четырёхугольника с вершинами в точках касания вписанной окружности со сторонами.
(в) Докажите, что во вписанной-описанном четырёхугольнике точка пересечения диагоналей лежит на прямой, соединяющей центры вписанной и описанной окружностей.

(г) Докажите, что все четырёхугольники, одновременно вписанные в окружность Ω и описанные вокруг окружности ω , имеют общую точку пересечения диагоналей.

4. В треугольнике ABC вписанная окружность ω касается сторон AB и AC в точках C_1 и B_1 . Оказалось, что прямые BC , B_1C_1 и касательная к (ABC) в точке A пересекаются в одной точке D . Докажите, что D лежит на прямой, соединяющей центры ω и (ABC) .
5. Вписанная в треугольник ABC окружность касается сторон BC , CA , AB в точках A_1 , B_1 , C_1 соответственно, точка I — её центр. Докажите, что медиана, проведённая из вершины A , отрезок B_1C_1 и прямая IA_1 пересекаются в одной точке.

Про полярное преобразование

6. (а) Дана окружность ω с центром в O . Докажите, что полярное преобразование относительно ω сохраняет направленные углы между точками (определите их при помощи O), между прямыми и между точками и прямыми.
(б) При помощи полярного преобразования в точке A передокажите лемму об изогоналях: если AS и AT — изогонали относительно угла BAC , $P = CT \cap BS$ и $Q = CS \cap BT$, то AP и AQ также являются изогоналями относительно угла BAC .
7. (а) Дан вписанный четырёхугольник $ABPC$. Обозначим $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$. Докажите, что $ABPC$ подобен $a'b'Pc'$, где a' , b' , c' — полюсы соответствующих прямых относительно полярного преобразования с центром в P .
(б) Передокажите теорему о прямой Симсона при помощи композиции полярного преобразования и инверсии.
8. Пусть I — центр окружности ω , вписанной в треугольник ABC . Прямая ℓ , отличная от сторон треугольника, касается ω . Точки A_0 , B_0 , C_0 на ℓ таковы, что

$$\angle AIA_0 = \angle BIB_0 = \angle CIC_0 = 90^\circ.$$

Докажите, что прямые AA_0 , BB_0 , CC_0 пересекаются в одной точке.

9. **Теорема Дроз-Фарни.** Пусть ABC — треугольник с ортоцентром H . Прямые p и q перпендикулярны и обе проходят через H . Прямая p пересекает прямые BC , AC и AB соответственно в точках A_0 , B_0 , C_0 . Аналогично прямая q пересекает прямые BC , AC и AB соответственно в точках A_1 , B_1 , C_1 . Докажите, что середины отрезков A_0A_1 , B_0B_1 и C_0C_1 коллинеарны.

3 Комбинаторика

Соответствия

1. Сколько существует разных способов разбить число 2026 на натуральные слагаемые, которые приблизительно равны? Слагаемых может быть одно или несколько. Числа называются приблизительно равными, если их разность не больше 1. Способы, отличающиеся только порядком слагаемых, считаются одинаковыми.
2. Вадим посчитал число всех цифр в последовательности $1, 2, 3, \dots, 10^k$, а Витя посчитал число всех нулей в последовательности $1, 2, 3, \dots, 10^{k+1}$. Чьё число больше?
3. (а) Докажите, что количество разбиений числа n на слагаемые, равно количеству разбиений числа $2n$ ровно на n слагаемых.
(б) Докажите, что количество разбиений числа n в сумму различных слагаемых равно количеству разбиений числа n в сумму нечётных слагаемых.
4. Пусть A — угловая клетка шахматной доски, B — соседняя с ней по диагонали клетка. Докажите, что число способов обойти всю доску хромой ладьей (ходит на одну клетку по вертикали или горизонтали), начиная с клетки A , больше, чем число способов обойти всю доску хромой ладьей, начиная с клетки B . (Ладья должна побывать на каждой клетке ровно один раз.)
5. Петя подсчитал количество всех возможных m -буквенных слов, в записи которых могут использоваться только четыре буквы Т, О, W и N, причём в каждом слове букв Т и О поровну. Вася подсчитал количество всех возможных $2m$ -буквенных слов, в записи которых могут использоваться только две буквы Т и О, и в каждом слове этих букв поровну. У кого слов получилось больше?
6. На окружности отмечено $2N$ точек (N — натуральное число). Известно, что через любую точку внутри окружности проходит не более двух хорд с концами в отмеченных точках. Назовем паросочетанием такой набор из N хорд с концами в отмеченных точках, что каждая отмеченная точка является концом ровно одной из этих хорд. Назовём паросочетание чётным, если количество точек, в которых пересекаются его хорды, чётно, и нечётным иначе. Найдите разность между количеством чётных и нечётных паросочетаний.
7. Дано натуральное число n . Что больше: число способов разрезать квадрат $3n \times 3n$ на клетчатые прямоугольники 1×3 или число способов разрезать клетчатый квадрат $2n \times 2n$ на доминошки 1×2 ?

Добавка

1. Боковая поверхность параллелепипеда с основанием $a \times b$ и высотой c ($a, b, c \in \mathbb{N}$) оклеена без наложений и пропусков прямоугольниками по клеточкам, причём каждый прямоугольник имеет чётную площадь и может перегибаться по ребру (хоть по всем четырём). Докажите, что если c нечётно, то число способов оклейки чётно.
2. На какую наибольшую степень двойки может делиться число вида $[(3 + \sqrt{10})^n]$?
3. Рассмотрим на клетчатой плоскости такие ломаные с началом в точке $(0, 0)$ и вершинами в точках с целыми координатами, что каждое очередное звено идёт по сторонам клеток либо вверх, либо вправо. Каждой такой ломаной соответствует червяк — фигура, состоящая из клеток плоскости, имеющих хотя бы одну общую точку с этой ломаной. Докажите, что червяков, которых можно разбить на двухклеточные доминошки ровно $n > 2$ различными способами, столько же, сколько натуральных чисел, меньших n и взаимно простых с n . (Червяки разные, если состоят из разных наборов клеток.)

Рекурренты

1. Сколькими способами можно замостить прямоугольную доску размера $2 \times n$ доминошками 1×2 ?
2. Садовник, привив черенок редкого растения, оставляет его расти два года, а затем ежегодно берет от него по 6 черенков. С каждым новым черенком он поступает аналогично. Сколько будет растений и черенков на восьмом году роста первоначального растения?
3. Лягушка прыгает по вершинам треугольника ABC , перемещаясь каждый раз в одну из соседних вершин. Сколькими способами она может попасть из A в A за 10 прыжков?
4. *Бинарным деревом* называются корневые деревья, у каждой вершины которого либо 2 потомка, либо 0. Найдите количество бинарных деревьев с 8 листьями.
5. Сколько 10-значных чисел удовлетворяют следующим условиям: все цифры числа принадлежат множеству 1, 2, 3, 4, 5, а любые две соседние цифры отличаются на 1?
6. Археолог нашёл n золотых монет. Из старых текстов он выяснил, что одна из них фальшивая и она легче подлинных. В распоряжении археолога есть только платные весы.
(а) Если одна чаша перевешивает другую, то археолог должен будет заплатить 1 фунт, и 2 фунта в случае равновесия. (б) Если левая чаша перевешивает другую, то археолог должен будет заплатить 2 фунта, и 1 фунт в ином случае.
При каком наибольшем n можно найти фальшивую монету, заплатив не более 10 фунтов?
7. Сколькими способами можно замостить прямоугольную доску размера 3×14 доминошками 1×2 ?

Рекурренты-2

Определение. Последовательность чисел $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$, которая удовлетворяет соотношению

$$a_{n+k} = t_1 a_{n+k-1} + t_2 a_{n+k-2} + \dots + t_k a_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (\star)$$

при некоторых фиксированных $t_1, \dots, t_k$, называется *линейной рекуррентной* (возвратной) последовательностью k -ого порядка.

Уравнение

$$x^k - t_1 x^{k-1} - t_2 x^{k-2} - \dots - t_k = 0$$

называется *характеристическим уравнением* последовательности $\{a_n\}$.

1. (а) Докажите, что если последовательность $\{a_0, a_1, \dots\}$ удовлетворяет соотношению $(\star)$, то последовательность $\{\lambda a_0, \lambda a_1, \dots\}$ также удовлетворяет соотношению $(\star)$.
- (б) Докажите, что если последовательности $\{a_0, a_1, \dots\}$ и $\{b_0, b_1, \dots\}$ удовлетворяет соотношению $(\star)$, то последовательность $\{a_0 + b_0, a_1 + b_1, \dots\}$ также удовлетворяет соотношению $(\star)$.
- (в) Докажите, что геометрическая прогрессия $\{a_n\} = x_0^n$ удовлетворяет соотношению $(\star)$ тогда и только тогда, когда x_0 — корень характеристического уравнения.
- (г) Пусть квадратное характеристическое уравнение последовательности $\{a_n\}$ имеет различные корни x_1 и x_2 . Докажите, что при фиксированных a_0, a_1 существует ровно одна пара чисел c_1, c_2 такая, что для любого $n \geq 0$ верно равенство

$$a_n = c_1 x_1^n + c_2 x_2^n.$$

2. Найдите явную формулу для чисел Фибоначчи.
3. Лягушка прыгает по вершинам треугольника ABC , перемещаясь каждый раз в одну из соседних вершин. Сколькими способами она может попасть из A в A за n прыжков?
4. Садовник, привив черенок редкого растения, оставляет его расти два года, а затем ежегодно берет от него по 6 черенков. С каждым новым черенком он поступает аналогично. Сколько будет растений и черенков на n году роста первоначального растения?
5. Некто взял в ипотеку S рублей. Каждый месяц долг банку растёт на $a\%$, а затем должник платит в банк M рублей. Сколько должник будет должен банку через n месяцев?
6. Сколькими способами можно замостить прямоугольную доску размера $3 \times 2n$ доминошками 1×2 ?

ЧУМЫ

Определение. *Частично упорядоченным множеством* называют ориентированный граф без петель и кратных стрелок, для которого выполнено свойство транзитивности: для любых трех вершин u, v, w таких, что $u \longrightarrow v$ и $v \longrightarrow w$, верно $u \longrightarrow w$.

Определение. *Цепью* называется последовательность вершин вида $v_1 \longrightarrow v_2 \longrightarrow \dots \longrightarrow v_n$. *Антицепью* называется набор вершин, попарно не соединённых рёбрами.

Теория

1. (а) **Теорема Мирского.** Докажите, что в частично упорядоченном множестве размер максимальной цепи равен минимальному количеству антицепей, на которые оно разбивается. (б) Докажите, что в частично упорядоченном множестве количество элементов не больше размера максимальной антицепи, умноженного на размер максимальной цепи.

Теорема Дилуорса. В частично упорядоченном множестве размер максимальной антицепи равен минимальному количеству цепей, на которые оно разбивается.

2. Рассмотрим какую-то вершину u нашего частично упорядоченного множества M , в которую не входит ни одной стрелки. По предположению индукции если m — размер максимальной антицепи в $M \setminus \{u\}$, то тогда $M \setminus \{u\}$ разбивается на m непересекающихся цепей: $M \setminus \{u\} = C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_m$. Назовём элемент $x \in M \setminus \{u\}$ *интересным*, если он лежит в какой-нибудь максимальной антицепи множества $M \setminus \{u\}$.

(а) Обозначим через x_i наибольший (относительно частичного порядка) интересный элемент цепи C_i . Докажите, что $\{x_1, \dots, x_m\}$ — антицепь.

(б) Попытайтесь добавить вершину u к антицепи $\{x_1, \dots, x_m\}$ и завершите доказательство теоремы Дилуорса.

Задачи

3. Для данных натуральных r и s покажите, что любая последовательность различных чисел длины $rs + 1$ содержит монотонно возрастающую подпоследовательность длины $r + 1$ или монотонно убывающую длины $s + 1$.
4. У хозяйки дома есть 100 пакетов. Известно, что среди любых 10 пакетов один из пакетов лежит в другом. Докажите, что можно выбрать 11 пакетов так, чтобы первый пакет лежал во втором, второй — в третьем, ..., десятый — в одиннадцатом.
5. В чемпионате по футболу участвуют 30 команд разной силы игры, и футбольный эксперт точно знает, как именно команды упорядочены по силе. За одну операцию разрешается предложить эксперту список из трёх команд, и он на своё усмотрение назовёт либо самую сильную, либо самую слабую команду из этих трёх (при этом дополнительно сообщив, сильную или слабую команду он назвал). Определите максимально число k , для которого с помощью нескольких

операций можно найти такую последовательность команд $T_1, T_2, \dots, T_k$, что для всех $1 \leq i < j \leq k$ команда T_i гарантированно слабее команды T_j .

6. Рассмотрим все прямоугольники с целыми сторонами, не превосходящими 1000. Какое максимальное количество таких прямоугольников можно выделить, чтобы ни один из них нельзя было поместить в другой так, чтобы их стороны были попарно параллельны?
7. Рёбра полного ориентированного графа на $n^2 + 1$ вершине раскрашены в два цвета, причём одноцветных циклов нет. Докажите, что в графе существует одноцветный путь длины n .
8. Какое наибольшее число шашек можно расставить в клетках таблицы $n \times n$ так, чтобы выполнялось условие: если шашка A находится ниже и правее шашки B , то они находятся в соседних по диагонали клетках?
9. Вершины графа покрашены в k цветов правильным образом, при этом в $k - 1$ цвет их покрасить нельзя. Цвета перенумерованы числами от 1 до k . Докажите, что можно выбрать путь, состоящий из k вершин, в котором i -я вершина была бы покрашена в i -й цвет.

Упорядочивание

1. Из целых чисел от 0 до 1000 выбрали 101 число. Докажите, что среди модулей их попарных разностей есть десять различных чисел, не превосходящих 100.
2. 500 яблок лежат в нескольких корзинах. Разрешается убирать корзины и вынимать яблоки из корзин. Докажите, что можно добиться того, чтобы во всех оставшихся корзинах было поровну яблок, а общее число яблок было не меньше 100.
3. В наборе несколько гирь, все веса которых различны. Известно, что если положить любую пару гирь на левую чашу, можно весы уравновесить, положив на правую чашу одну или несколько гирь из остальных. Найдите наименьшее возможное число гирь в наборе.
4. На кольцевом треке $2N$ велосипедистов стартовали одновременно из одной точки и поехали постоянными различными скоростями (в одну сторону). Если после старта два велосипедиста снова оказываются одновременно в одной точке, назовем это встречей. До полудня каждые два велосипедиста встретились хотя бы раз, при этом никакие три или больше не встречались одновременно. Докажите, что до полудня у каждого велосипедиста было не менее N^2 встреч.
5. Назовем *ожерельем* с l бусинками граф, состоящий из l циклов, сцепленных в одну цепочку. Докажите, что если граф G не содержит ожерелий с l бусинками, то вершины G можно правильно покрасить в $2l$ цветов.
6. Последовательность чисел $a_1, \dots, a_k$ назовём *чашкой*, если $a_1 - a_2 \geq a_2 - a_3 \geq \dots \geq a_{k-1} - a_k$, и *крышкой*, если $a_1 - a_2 \leq a_2 - a_3 \leq \dots \leq a_{k-1} - a_k$. Пусть $k, l \geq 2$ – натуральные числа. Обозначим через $f(k, l)$ наименьшее такое N , что в любой последовательности чисел $a_1, a_2, \dots, a_N$ найдется либо чашка размера k , либо крышка размера l .
 - (а) Докажите неравенство $f(k, l) \leq f(k-1, l) + f(k, l-1) - 1$.
 - (б) Докажите неравенство $f(k, l) \leq C_{k+l-4}^{l-2} + 1$.
 - (в) Постройте последовательность длины C_{k+l-4}^{l-2} , которая не содержит ни чашек размера k , ни крышек размера l .

Часть II

Материалы группы 9-2

Симметрические многочлены: теория

Многочлен $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется **симметрическим**, если он не меняется при любой перестановке аргументов $x_1, \dots, x_n$.

Элементарными симметрическими многочленами $\sigma_k(x_1, \dots, x_n)$ называются многочлены

$$\sigma_k(x_1, \dots, x_n) := \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}.$$

Например, $\sigma_1(x_1, \dots, x_n) = x_1 + \dots + x_n$ и $\sigma_n(x_1, \dots, x_n) = x_1 x_2 \dots x_n$.

1. Выразите через элементарные симметрические многочлены от x, y, z

(а) $x^3 + y^3 + z^3$;

(б) $x^2 y + y^2 z + z^2 x + x y^2 + y z^2 + z x^2$;

(в) $x^3 y^3 + y^3 z^3 + z^3 x^3$.

Основная теорема о симметрических многочленах. Любой симметрический многочлен можно единственным образом представить в виде многочлена от элементарных симметрических многочленов.

Моном $a x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$ считается **лексикографически больше** монома $b x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \dots x_n^{\beta_n}$, если существует такой индекс $m \leq n$, что $\alpha_i = \beta_i$ для всех $i < m$ и $\alpha_m > \beta_m$.

Ненулевой моном многочлена P называется **старшим**, если он лексикографически больше любого другого ненулевого монома многочлена P .

2. (а) Докажите, что старший моном произведения двух многочленов равен произведению старших мономов этих многочленов.

(б) Докажите, что для любого монома $q = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$ такого, что $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_n$, есть единственный набор чисел $\beta_1, \dots, \beta_n \geq 0$ такой, что старший моном многочлена $\sigma_1^{\beta_1} \sigma_2^{\beta_2} \dots \sigma_n^{\beta_n}$ совпадает с q .

(в) Докажите основную теорему о симметрических многочленах.

3. (а) Дан многочлен $P(x)$ степени n с рациональными коэффициентами. Пусть $a_1, a_2, \dots, a_n$ — его корни (возможно, комплексные). Также дан симметрический многочлен $Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$ с рациональными коэффициентами. Докажите, что число $Q(a_1, a_2, \dots, a_n)$ рационально.

(б) Про P известно, что он приведенный, имеет целые коэффициенты, а симметрический многочлен Q также имеет целые коэффициенты. Докажите, что число $Q(a_1, a_2, \dots, a_n)$ целое.

4. (а) Докажите по индукции по n , что если многочлен $P(x_1, \dots, x_n)$ при любых значениях $x_1, \dots, x_n$ равен нулю, то P — нулевой многочлен.

(б) Докажите, что если значение многочлена $P(x_1, \dots, x_n)$ не меняется при любой перестановке аргументов, то многочлен P является симметрическим.

5. Многочлен $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ от n переменных называется *кососимметрическим*, если он меняет знак при транспозиции любых двух переменных. Положим

$$\Delta(x_1, \dots, x_n) := \prod_{i < j} (x_i - x_j).$$

Докажите, что P представим в виде

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n) = \Delta(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot Q(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

где Q — некоторый симметрический многочлен.

6. Про вещественные числа $a < b < c$ и $x < y < z$ известно, что $a + b + c = x + y + z$, $a^2 + b^2 + c^2 = x^2 + y^2 + z^2$ и что $a < x$. Докажите, что $c < z$.

Симметрические многочлены: задачи

1. Многочлен $x^{2026} + y^{2026}$ выразили через элементарные симметрические как $P(x + y, xy)$. Найдите сумму коэффициентов многочлена P .
2. (а) Юлий Васильевич загадал три числа, после чего сообщил Юрию Германовичу их сумму, сумму квадратов и сумму кубов. Сможет ли Юрий Германович восстановить исходные числа?
(б) А Евгению Сергеевичу Юлий Васильевич сообщил сумму чисел, сумму квадратов и сумму четвёртых степеней. Сможет ли Евгений Сергеевич восстановить исходные числа?
(в) А если Юлий Васильевич загадает n чисел и сообщит их сумму, сумму их квадратов, сумму кубов, $\dots$, сумму n -х степеней?
3. В таблицу 3×3 записано девять чисел. Известно, что шесть чисел — суммы строк и суммы столбцов таблицы — равны между собой. Докажите, что сумма произведений строк таблицы равна сумме произведений её столбцов.
4. Докажите, что произведение всех чисел вида

$$\pm\sqrt{1} \pm \sqrt{2} \pm \dots \pm \sqrt{2026}$$

является целым числом.

5. Симметрический многочлен $P(x_1, \dots, x_n)$ от $n > 1$ переменных зануляется при подстановке $x_1 = x_2$.
(а) Докажите, что его степень не меньше $n(n - 1)$.
(б) Найдите все такие многочлены степени ровно $n(n - 1)$.

Однородные симметрические неравенства: Мюрхед

Определение. Пусть дан набор целых неотрицательных чисел $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, такой что $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_n$. Введём обозначение следующего симметрического многочлена от переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$:

$$T_\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{sym} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n},$$

где суммирование ведётся по всем возможным перестановкам переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Примеры.

- $T_{(2,1,0)}(x, y, z) = x^2y + xy^2 + y^2z + yz^2 + z^2x + xz^2$;
- $T_{(1,1,1)}(x, y, z) = 6xyz$;
- $T_{(1,1,0)}(x, y, z) = 2xy + 2yz + 2zx$.

Ещё определение. Пусть даны два набора целых неотрицательных чисел $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ и $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$, такие что $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_n$, $\beta_1 \geq \beta_2 \geq \dots \geq \beta_n$ и $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n$. Тогда будем говорить, что α *мажорирует* β (обозначается как $\alpha \succ \beta$), если для любого $1 \leq k \leq n$ верно

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i \geq \sum_{i=1}^k \beta_i.$$

Неравенство Мюрхеда. Пусть $\alpha \succ \beta$. Тогда для любых неотрицательных $x_1, x_2, \dots, x_n$ верно:

$$T_\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq T_\beta(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Дружеский совет. Если у вас неоднородное неравенство, то сделайте его однородным.

1. Для неотрицательных чисел x, y, z докажите неравенство

$$(x+y)(y+z)(z+x) + xyz \leq 3(x^3 + y^3 + z^3).$$

2. Для неотрицательных чисел x, y, z , таких что $x+y+z = 1$, докажите неравенство

$$1 + x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz \geq 4(xy + yz + zx).$$

3. Для неотрицательных чисел x, y, z , таких что $x^2 + y^2 + z^2 = 3$, докажите неравенство

$$x + y + z \geq xy + yz + zx.$$

4. Для положительных a, b, c, d докажите неравенство

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{4}} \geq \sqrt[3]{\frac{abc + bcd + cda + dab}{4}}.$$

5. Для неотрицательных чисел a, b, c верно $a + b + c = ab + bc + ac$. Докажите, что

$$a + b + c + 1 \geq 4abc.$$

6. Для положительных чисел a, b и c , удовлетворяющих условию $a + b + c = 1$, докажите неравенство

$$\frac{1+a}{1-a} + \frac{1+b}{1-b} + \frac{1+c}{1-c} \leq 2 \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \right).$$

7. Сумма положительных чисел a, b, c равна 1. Докажите, что

$$\frac{1}{a+bc} + \frac{1}{b+ca} + \frac{1}{c+ab} \geq \frac{7}{1+abc}.$$

Однородные симметрические неравенства: Шур.

Неравенство Шура. Для положительных x, y, z и натурального n верно

$$\sum_{sym} x^{n+2} + \sum_{sym} x^n yz \geq 2 \sum_{sym} x^{n+1} y.$$

В частности при $n = 1$:

$$x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \geq x^2y + xy^2 + y^2z + yz^2 + z^2x + xz^2.$$

Творческая задача №0. Докажите неравенство Шура.

1. Для неотрицательных чисел x, y, z , таких что $x + y + z = 1$, докажите неравенство

$$1 + 9xyz \geq 4(xy + yz + zx).$$

2. Для $x, y, z \geq 0$, таких что $x + y + z = 1$, докажите неравенство

$$xy + yz + zx - 2xyz \leq \frac{7}{27}.$$

3. Для положительных чисел a, b и c докажите неравенство

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq \frac{a+b}{c+a} + \frac{b+c}{a+b} + \frac{c+a}{b+c}.$$

4. Для положительных чисел a, b, c докажите неравенство

$$108 \cdot (ab + bc + ca) \leq \left(\sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a} \right)^4.$$

5. Сумма положительных чисел x, y, z равна 1. Докажите, что

$$\left(\frac{x-yz}{x+yz} \right)^2 + \left(\frac{y-zx}{y+zx} \right)^2 + \left(\frac{z-xy}{z+xy} \right)^2 \geq \frac{3}{4}.$$

6. Для положительных a, b, c, d докажите, что

$$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + 2abcd \geq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2d^2 + d^2a^2 + a^2c^2 + b^2d^2.$$

pqr-метод lite

Для данных a, b, c положим $p := a + b + c$, $q := ab + bc + ca$, $r := abc$.

Будем фиксировать p, q и варьировать r так, чтобы переменные a, b, c оставались неотрицательными.

Теорема. (i) Число r принимает наибольшее значение, когда среди a, b, c есть одинаковые числа.

(ii) Число r принимает наименьшее значение, когда среди a, b, c есть одинаковые числа или одно из чисел a, b, c равно нулю.

Пример. Доказать для неотрицательных a, b, c таких, что $a + b + c = ab + bc + ca$, неравенство

$$a + b + c + 1 \geq 4abc.$$

Набросок решения. Зафиксируем $p = q$. Неравенство относительно p, q, r записывается как $p + 1 \geq 4r$. Поскольку неравенство линейно относительно r , достаточно проверить крайний случай — когда r наибольшее. Таким образом, можно считать, что $a = b$, а для таких a, b, c неравенство верно (далее должна идти проверка).

1. Для положительных чисел a, b, c таких, что $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$, докажите, что

$$(a - 1)(b - 1)(c - 1) \geq 8.$$

2. Для неотрицательных чисел a, b, c с суммой 3 докажите, что

$$\frac{1}{9 - ab} + \frac{1}{9 - bc} + \frac{1}{9 - ca} \leq \frac{3}{8}.$$

3. Для положительных чисел a, b, c докажите, что

$$\frac{1}{a^2 + b^2} + \frac{1}{b^2 + c^2} + \frac{1}{c^2 + a^2} \geq \frac{10}{(a + b + c)^2}.$$

4. Для неотрицательных чисел a, b, c таких, что $ab + bc + ca = 1$, докажите, что

$$\frac{1}{(a + b)^2} + \frac{1}{(b + c)^2} + \frac{1}{(c + a)^2} \geq \frac{9}{4}.$$

5. Для неотрицательных чисел a, b, c докажите, что

$$a^5 + b^5 + c^5 + abc(ab + bc + ca) \geq a^2b^2(a + b) + b^2c^2(b + c) + c^2a^2(c + a).$$

6. Для чисел $a, b, c \geq 1$ с суммой 9 докажите, что $\sqrt{ab + bc + ca} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$.

7. Для чисел $a, b, c, d > 0$, в сумме дающих 3, докажите, что

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2} \leq \frac{1}{a^2b^2c^2d^2}.$$

Двойное отношение

Двойным отношением четвёрки точек A, B, C, D , лежащих на одной прямой, называется число

$$(A, B; C, D) = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} : \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}}.$$

А именно, это отношение отношений, в которых точки C и D делят отрезок AB .

Двойным отношением прямых a, b, c, d , пересекающихся в одной точке, называется число

$$(a, b; c, d) = \frac{\sin \angle(\vec{a}, \vec{c})}{\sin \angle(\vec{c}, \vec{b})} : \frac{\sin \angle(\vec{a}, \vec{d})}{\sin \angle(\vec{d}, \vec{b})},$$

где $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ — произвольные векторы, направленные вдоль соответствующих прямых, $\angle(\vec{a}, \vec{b})$ — ориентированный угол (с точностью до 2π).

Утверждение. Прямые a, b, c, d пересекаются в одной точке, прямая ℓ пересекает их в различных точках A, B, C, D соответственно. Тогда $(a, b; c, d) = (A, B; C, D)$.

Четвёрка точек или прямых называется *гармонической*, если их двойное отношение равно -1 . Примеры:

- A, B, M, ∞ , где M — середина отрезка AB ;
- B, C, A_1, A_2 , где AA_1, BB_1, CC_1 — чевианы, пересекающиеся в одной точке, A_2 — точка пересечения прямых B_1C_1 и BC .

Утверждение. Про точки A, B, C, D, D_1 , лежащие на одной прямой, известно, что $(A, B; C, D) = (A, B; C, D_1)$. Тогда $D = D_1$.

1. Известно, что $(A, B; C, D) = \lambda$. Найдите $(B, A; C, D)$, $(A, B; D, C)$ и $(A, C; B, D)$. Осознайте, что с помощью этого можно найти двойное отношение для любой перестановки точек.
2. Докажите, что следующие четвёрки гармонические:
 - (а) a, b, c, d , где прямые c и d — внутренняя и внешняя биссектрисы угла между прямыми a и b ;
 - (б) такие точки A, B, C, D , что для середины M отрезка AB выполнено равенство $MA^2 = \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD}$.
3. Прямые a, b, c, d пересекаются в одной точке. Докажите, что если $c \perp d$ и $(a, b; c, d) = -1$, то c и d — биссектрисы углов, образованных прямыми a и b .
4. Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке R , продолжения сторон AB и CD — в точке P , а продолжения сторон BC и AD — в точке Q .
 - (а) Прямая, проходящая через точку R , пересекает прямые AB, BC, CD, DA в точках M, X, N, Y . Докажите, что R делит пополам отрезок MN тогда и только тогда, когда R делит пополам отрезок XY .

- (б) Обозначим через T проекцию точки R на прямую PQ . Докажите, что противоположные стороны четырёхугольника видны из точки T под равными углами.
5. В треугольнике ABC проведена биссектриса AL и биссектриса внешнего угла AN . Точка M — середина стороны AC , P — точка пересечения прямых AB и ML . Докажите, что $PA = PN$.
6. Пусть H_a и L_a — основание высоты и биссектрисы треугольника ABC , проведённых из вершины A ; вписанная и внеписанная окружности касаются стороны BC в точках K_a и T_a соответственно.
- (а) Докажите, что $(H_a, L_a; K_a, T_a) = -1$;
- (б) Пусть I и I_a — центр вписанной и внеписанной окружностей треугольника ABC . Докажите, что прямые H_aI и H_aI_a симметричны относительно прямой BC .
- (в) Определим аналогично точки H_b, L_b, K_b, T_b . Докажите, что прямые $H_aH_b, L_aL_b, T_aT_b, K_aK_b$ пересекаются в одной точке.
7. В треугольнике ABC высоты BB_1 и CC_1 пересекаются в точке H , точка M — середина стороны BC , а X — точка пересечения внутренних касательных к окружностям, вписанным в треугольники BMC_1 и $СMB_1$. Докажите, что точки X, M и H лежат на одной прямой.
8. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Точки Q, A, B, P лежат на одной прямой именно в таком порядке. Прямая AC касается окружности (ADQ) , а прямая BD касается окружности (BCP) . Точки M и N — середины сторон BC и AD соответственно. Докажите, что следующие касательная к (ANQ) в точке A , касательная к (BMP) в точке B пересекаются на прямой CD .

Двойное отношение. Добавка

1. В треугольнике ABC отметили середину M стороны AB . Вторую точку пересечения BC с описанной окружностью треугольника AMC обозначим за X . Рассмотрим также окружность ω , касающуюся AC в точке C и проходящую через X . Далее, прямая XM пересекает ω в точке Z и AC в точке Y так, что A лежит между C и Y). Докажите, что AX , BY , CZ проходят через одну точку.
2. На сторонах AB , AC , BC , BC треугольника ABC отмечены точки B' , C' , P , Q соответственно. AP , AQ симметричны относительно биссектрисы угла A , $B'C' \parallel BC$. AP , AQ пересекают $B'C'$ в точках P' , Q' . Пусть X и Y — точки пересечения пар прямых BP' и QC' , PB' и CQ' соответственно. Докажите, что XY касается описанной окружности треугольника ABC .

Двойные отношения на окружности

Определение. Двойным отношением $(A, B; C, D)$ различных точек A, B, C, D , лежащих на одной окружности, называют величину $(PA, PB; PC, PD)$, где P — произвольная точка той же окружности.

Эта величина не зависит от выбора точки P . Точка P может совпадать с одной из точек A, B, C, D , тогда соответствующая секущая вырождается в касательную к окружности.

Утверждение. При инверсии сохраняется двойное отношение четырёх точек, лежащих на обобщённой окружности.

Из этого следует, что двойное отношение сохраняется при проекции с окружности на себя: если через точку P проведены четыре секущие, пересекающие окружность в точках A и A_1 , B и B_1 , C и C_1 , D и D_1 , то $(A, B; C, D) = (A_1, B_1; C_1, D_1)$ (но оно не обязательно равно двойному отношению прямых PA, PB, PC, PD).

Определение. Вписанный четырёхугольник $ABCD$ называется *гармоническим*, если $(A, C; B, D) = -1$.

1. Из точки P провели касательные PX и PY к окружности ω и секущую, которая пересекла ω в точках A и B , а прямую XY — в точке C . Докажите, что
(а) $(A, B; X, Y) = -1$; (б) $(A, B; C, P) = -1$.
2. Биссектриса внутреннего угла при вершине A треугольника ABC пересекает (ABC) в точке D , а биссектриса внешнего угла пересекает BC в точке E . Симедиана, поведённая из вершины A , пересекает (ABC) в точке L . Докажите, что D, E, L лежат на одной прямой.
3. Дан треугольник ABC и точка M . Прямая, проходящая через M , пересекает AB, BC, CA в C_1, A_1, B_1 соответственно. Прямые AM, BM, CM пересекают окружность (ABC) в точках A_2, B_2, C_2 соответственно. Докажите, что A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 пересекаются в одной точке, лежащей на (ABC) .
4. (а) **Теорема о бабочке.** Хорды AC и BD окружности ω проходят через середину хорды MN . Отрезки AD и BC пересекают отрезок MN в точках X и Y . Докажите, что $XM = YN$.
(б) **Теорема о двойной бабочке.** На хорде MN окружности ω отмечены точки M_1 и N_1 такие, что $MM_1 = NN_1$. Хорда AC проходит через точку M_1 , а хорда BD — через точку N_1 . Отрезки AD и BC пересекают MN в точках X и Y соответственно. Докажите, что $XM = YN$.
5. Окружности $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ касаются друг друга внешним образом по циклу. Окружность ω касается их всех внешним образом в точках X_1, X_2, X_3, X_4 соответственно. Докажите, что $X_1X_2X_3X_4$ образуют гармонический четырёхугольник.

6. Из точки P вне окружности ω проведены касательные PX и PY и две секущие, пересекающие окружность в точках A и B , C и D . Докажите, что точки пересечения прямых AC и BD , AD и BC лежат на прямой XY .
7. Окружность проходит через вершины B и C треугольника ABC и повторно пересекает отрезки AB и AC в точках C_1 и B_1 соответственно. Отрезки BB_1 и CC_1 пересекаются в точке P , прямая AP пересекает отрезок BC в точке A_1 . Докажите, что окружность $(A_1B_1C_1)$ проходит через середину отрезка BC .
8. Докажите, что точка Лемуана треугольника ABC (т. е. точка пересечения симедиан) лежит на прямой, соединяющей середину высоты из вершины A с серединой стороны BC .
9. Биссектрисы углов B и C треугольника ABC пересекаются в точке I и пересекают окружность (ABC) в точках B_1 и C_1 соответственно. Точка D — середина дуги BAC . Окружности ω_b и ω_c касаются прямых AB и AC соответственно и окружности (ABC) внутренним образом в точках B_1 и C_1 соответственно. Докажите, что прямая, проходящая через точки пересечения ω_b и ω_c , пересекается с прямой DI на (ABC) .

Добавка

1. Четырёхугольник $ABCD$ описан около окружности, лучи BA и CD пересекаются в точке E , лучи BC и AD — в точке F . Вписанная окружность треугольника, образованного прямыми AB , CD и биссектрисой угла B , касается прямой AB в точке K , а вписанная окружность треугольника, образованного прямыми AD , BC и биссектрисой угла B , касается прямой BC в точке L . Докажите, что прямые KL , AC и EF пересекаются в одной точке.
2. Внутри треугольника ABC на биссектрисе угла A выбрана произвольная точка J . Лучи BJ и CJ пересекают стороны AC и AB в точках K и L соответственно. Касательная к окружности (AKL) в точке A пересекает прямую BC в точке P . Докажите, что $PA = PJ$.
3. В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC проведены высоты BH_B , CH_C и биссектрисы BL_B , CL_C . Точки I_B , I_C — центры вневписанных окружностей напротив вершин B и C соответственно, точка O — центр описанной окружности. Прямые I_BH_C и I_CH_B пересекаются в точке X . Докажите, что $OX \perp L_BL_C$.

Добавка

1. Вписанная окружность ω треугольника ABC с центром в I касается сторон AC и AB в точках E и F соответственно. Пусть M и N — точки пересечения EF с (ABC) , причём M лежит на «малой дуге» AB . Пусть S — точка пересечения касательных к (ABC) в точках A и M . Касательные из M к ω повторно пересекают Ω в точках L и K . Пусть R — точка пересечения EF и KL , а T — пересечение касательных к (ABC) в точках B и C . Докажите, что I — инцентр треугольника RST .
2. В четырёхугольник $ABCD$ вписана окружность с центром в I . Докажите, что ортоцентры треугольников ABI , BCI , CDI и DAI лежат на одной прямой, проходящей через точку пересечения диагоналей $ABCD$.

Поляры

Определение. Дана окружность ω с центром O и точка P . *Полярной* точки P относительно ω называется прямая ℓ , которая проходит через инверсную точку P' перпендикулярно прямой OP . Точка P называется *полюсом* прямой ℓ .

Полюсом бесконечно удалённой прямой будем считать центр окружности. Полюсом прямой ℓ , проходящей через центр ω , будем считать бесконечно удалённую точку, соответствующую перпендикулярному ℓ направлению.

Таким образом, мы задали биекцию между точками и прямыми на проективной плоскости. Замена точек на соответствующие им прямые и наоборот называется *полярным преобразованием*.

- Если точка P лежит вне ω , то её полярна — это прямая XY , где PX и PY — касательные к ω .
 - Если A лежит на поляре B , то B лежит на поляре A .
 - Через точку P проведена секущая, пересекающая окружность ω в точках A и B , а её полярю — в точке C . Тогда $(A, B; C, P) = -1$.
 - Пусть через точки P проведены две секущие, пересекающие окружность в точках A и B , C и D . Тогда точки пересечения прямых AC и BD , AD и BC лежат на поляре точки P относительно ω .
 - Точки A, B, C лежат на одной прямой $\iff$ их полярны a, b, c пересекаются в одной точке.
1. Четырёхугольник вписан в окружность с центром O . Обозначим точки пересечения противоположных сторон и точку пересечения диагоналей четырёхугольника через P, Q и R . Докажите, что O — ортоцентр треугольника PQR .
 2. На окружности даны точки A, B, C, X и Y . Прямые AX и BY пересекаются в точке C_1 , а прямые AY и BX — в точке C_2 . Аналогично определяются точки B_1, B_2 и A_1, A_2 . Докажите, что прямые A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 пересекаются в одной точке.
 3. (а) Вписанная окружность описанного четырёхугольника $ABCD$ касается его сторон AB, BC, CD, DA в точках K, L, M, N соответственно. Прямые AB и CD пересекаются в точке P , прямые AD и BC — в точке Q , прямые KL и MN — в точке R , прямые KN и LM — в точке S . Докажите, что P, Q, R, S лежат на одной прямой.
(б) Докажите, что в описанном четырёхугольнике точка пересечения диагоналей совпадает с точкой пересечения диагоналей четырёхугольника с вершинами в точках касания вписанной окружности со сторонами.
(в) Докажите, что во вписанной-описанном четырёхугольнике точка пересечения диагоналей лежит на прямой, соединяющей центры вписанной и описанной окружностей.

(г) Докажите, что все четырёхугольники, одновременно вписанные в окружность Ω и описанные вокруг окружности ω , имеют общую точку пересечения диагоналей.

4. В треугольнике ABC вписанная окружность ω касается сторон AB и AC в точках C_1 и B_1 . Оказалось, что прямые BC , B_1C_1 и касательная к (ABC) в точке A пересекаются в одной точке D . Докажите, что D лежит на прямой, соединяющей центры ω и (ABC) .
5. Вписанная в треугольник ABC окружность касается сторон BC , CA , AB в точках A_1 , B_1 , C_1 соответственно, точка I — её центр. Докажите, что медиана, проведённая из вершины A , отрезок B_1C_1 и прямая IA_1 пересекаются в одной точке.

Про полярное преобразование

6. (а) Дана окружность ω с центром в O . Докажите, что полярное преобразование относительно ω сохраняет направленные углы между точками (определите их при помощи O), между прямыми и между точками и прямыми.
(б) При помощи полярного преобразования в точке A передокажите лемму об изогоналях: если AS и AT — изогонали относительно угла BAC , $P = CT \cap BS$ и $Q = CS \cap BT$, то AP и AQ также являются изогоналями относительно угла BAC .
7. (а) Дан вписанный четырёхугольник $ABPC$. Обозначим $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$. Докажите, что $ABPC$ подобен $a'b'Pc'$, где a' , b' , c' — полюсы соответствующих прямых относительно полярного преобразования с центром в P .
(б) Передокажите теорему о прямой Симсона при помощи композиции полярного преобразования и инверсии.
8. Пусть I — центр окружности ω , вписанной в треугольник ABC . Прямая ℓ , отличная от сторон треугольника, касается ω . Точки A_0 , B_0 , C_0 на ℓ таковы, что

$$\angle AIA_0 = \angle BIB_0 = \angle CIC_0 = 90^\circ.$$

Докажите, что прямые AA_0 , BB_0 , CC_0 пересекаются в одной точке.

9. **Теорема Дроз-Фарни.** Пусть ABC — треугольник с ортоцентром H . Прямые p и q перпендикулярны и обе проходят через H . Прямая p пересекает прямые BC , AC и AB соответственно в точках A_0 , B_0 , C_0 . Аналогично прямая q пересекает прямые BC , AC и AB соответственно в точках A_1 , B_1 , C_1 . Докажите, что середины отрезков A_0A_1 , B_0B_1 и C_0C_1 коллинеарны.

Соответствия

1. Сколько существует разных способов разбить число 2026 на натуральные слагаемые, которые приблизительно равны? Слагаемых может быть одно или несколько. Числа называются приблизительно равными, если их разность не больше 1. Способы, отличающиеся только порядком слагаемых, считаются одинаковыми.
2. Вадим посчитал число всех цифр в последовательности $1, 2, 3, \dots, 10^k$, а Витя посчитал число всех нулей в последовательности $1, 2, 3, \dots, 10^{k+1}$. Чьё число больше?
3. (а) Докажите, что количество разбиений числа n на слагаемые, равно количеству разбиений числа $2n$ ровно на n слагаемых.
(б) Докажите, что количество разбиений числа n в сумму различных слагаемых равно количеству разбиений числа n в сумму нечётных слагаемых.
4. Пусть A — угловая клетка шахматной доски, B — соседняя с ней по диагонали клетка. Докажите, что число способов обойти всю доску хромой ладьей (ходит на одну клетку по вертикали или горизонтали), начиная с клетки A , больше, чем число способов обойти всю доску хромой ладьей, начиная с клетки B . (Ладья должна побывать на каждой клетке ровно один раз.)
5. Петя подсчитал количество всех возможных m -буквенных слов, в записи которых могут использоваться только четыре буквы Т, О, W и N, причём в каждом слове букв Т и О поровну. Вася подсчитал количество всех возможных $2m$ -буквенных слов, в записи которых могут использоваться только две буквы Т и О, и в каждом слове этих букв поровну. У кого слов получилось больше?
6. На окружности отмечено $2N$ точек (N — натуральное число). Известно, что через любую точку внутри окружности проходит не более двух хорд с концами в отмеченных точках. Назовем паросочетанием такой набор из N хорд с концами в отмеченных точках, что каждая отмеченная точка является концом ровно одной из этих хорд. Назовём паросочетание чётным, если количество точек, в которых пересекаются его хорды, чётно, и нечётным иначе. Найдите разность между количеством чётных и нечётных паросочетаний.
7. Дано натуральное число n . Что больше: число способов разрезать квадрат $3n \times 3n$ на клетчатые прямоугольники 1×3 или число способов разрезать клетчатый квадрат $2n \times 2n$ на доминошки 1×2 ?

Добавка

1. Боковая поверхность параллелепипеда с основанием $a \times b$ и высотой c ($a, b, c \in \mathbb{N}$) оклеена без наложений и пропусков прямоугольниками по клеточкам, причём каждый прямоугольник имеет чётную площадь и может перегибаться по ребру (хоть по всем четырём). Докажите, что если c нечётно, то число способов оклейки чётно.
2. На какую наибольшую степень двойки может делиться число вида $[(3 + \sqrt{10})^n]$?
3. Рассмотрим на клетчатой плоскости такие ломаные с началом в точке $(0, 0)$ и вершинами в точках с целыми координатами, что каждое очередное звено идёт по сторонам клеток либо вверх, либо вправо. Каждой такой ломаной соответствует червяк — фигура, состоящая из клеток плоскости, имеющих хотя бы одну общую точку с этой ломаной. Докажите, что червяков, которых можно разбить на двухклеточные доминошки ровно $n > 2$ различными способами, столько же, сколько натуральных чисел, меньших n и взаимно простых с n . (Червяки разные, если состоят из разных наборов клеток.)

Рекурренты

1. Сколькими способами можно замостить прямоугольную доску размера $2 \times n$ доминошками 1×2 ?
2. Садовник, привив черенок редкого растения, оставляет его расти два года, а затем ежегодно берет от него по 6 черенков. С каждым новым черенком он поступает аналогично. Сколько будет растений и черенков на восьмом году роста первоначального растения?
3. Лягушка прыгает по вершинам треугольника ABC , перемещаясь каждый раз в одну из соседних вершин. Сколькими способами она может попасть из A в A за 10 прыжков?
4. *Бинарным деревом* называются корневые деревья, у каждой вершины которого либо 2 потомка, либо 0. Найдите количество бинарных деревьев с 8 листьями.
5. Сколько 10-значных чисел удовлетворяют следующим условиям: все цифры числа принадлежат множеству 1, 2, 3, 4, 5, а любые две соседние цифры отличаются на 1?
6. Археолог нашёл n золотых монет. Из старых текстов он выяснил, что одна из них фальшивая и она легче подлинных. В распоряжении археолога есть только платные весы.
(а) Если одна чаша перевешивает другую, то археолог должен будет заплатить 1 фунт, и 2 фунта в случае равновесия. (б) Если левая чаша перевешивает другую, то археолог должен будет заплатить 2 фунта, и 1 фунт в ином случае.
При каком наибольшем n можно найти фальшивую монету, заплатив не более 10 фунтов?
7. Сколькими способами можно замостить прямоугольную доску размера 3×14 доминошками 1×2 ?

Рекурренты-2

Определение. Последовательность чисел $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$, которая удовлетворяет соотношению

$$a_{n+k} = t_1 a_{n+k-1} + t_2 a_{n+k-2} + \dots + t_k a_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (\star)$$

при некоторых фиксированных $t_1, \dots, t_k$, называется *линейной рекуррентной* (возвратной) последовательностью k -ого порядка.

Уравнение

$$x^k - t_1 x^{k-1} - t_2 x^{k-2} - \dots - t_k = 0$$

называется *характеристическим уравнением* последовательности $\{a_n\}$.

1. (а) Докажите, что если последовательность $\{a_0, a_1, \dots\}$ удовлетворяет соотношению $(\star)$, то последовательность $\{\lambda a_0, \lambda a_1, \dots\}$ также удовлетворяет соотношению $(\star)$.
- (б) Докажите, что если последовательности $\{a_0, a_1, \dots\}$ и $\{b_0, b_1, \dots\}$ удовлетворяет соотношению $(\star)$, то последовательность $\{a_0 + b_0, a_1 + b_1, \dots\}$ также удовлетворяет соотношению $(\star)$.
- (в) Докажите, что геометрическая прогрессия $\{a_n\} = x_0^n$ удовлетворяет соотношению $(\star)$ тогда и только тогда, когда x_0 — корень характеристического уравнения.
- (г) Пусть квадратное характеристическое уравнение последовательности $\{a_n\}$ имеет различные корни x_1 и x_2 . Докажите, что при фиксированных a_0, a_1 существует ровно одна пара чисел c_1, c_2 такая, что для любого $n \geq 0$ верно равенство

$$a_n = c_1 x_1^n + c_2 x_2^n.$$

2. Найдите явную формулу для чисел Фибоначчи.
3. Лягушка прыгает по вершинам треугольника ABC , перемещаясь каждый раз в одну из соседних вершин. Сколькими способами она может попасть из A в A за n прыжков?
4. Садовник, привив черенок редкого растения, оставляет его расти два года, а затем ежегодно берет от него по 6 черенков. С каждым новым черенком он поступает аналогично. Сколько будет растений и черенков на n году роста первоначального растения?
5. Некто взял в ипотеку S рублей. Каждый месяц долг банку растёт на $a\%$, а затем должник платит в банк M рублей. Сколько должник будет должен банку через n месяцев?
6. Сколькими способами можно замостить прямоугольную доску размера $3 \times 2n$ доминошками 1×2 ?

ЧУМЫ

Определение. *Частично упорядоченным множеством* называют ориентированный граф без петель и кратных стрелок, для которого выполнено свойство транзитивности: для любых трех вершин u, v, w таких, что $u \longrightarrow v$ и $v \longrightarrow w$, верно $u \longrightarrow w$.

Определение. *Цепью* называется последовательность вершин вида $v_1 \longrightarrow v_2 \longrightarrow \dots \longrightarrow v_n$. *Антицепью* называется набор вершин, попарно не соединённых рёбрами.

Теория

1. (а) **Теорема Мирского.** Докажите, что в частично упорядоченном множестве размер максимальной цепи равен минимальному количеству антицепей, на которые оно разбивается. (б) Докажите, что в частично упорядоченном множестве количество элементов не больше размера максимальной антицепи, умноженного на размер максимальной цепи.

Теорема Дилуорса. В частично упорядоченном множестве размер максимальной антицепи равен минимальному количеству цепей, на которые оно разбивается.

2. Рассмотрим какую-то вершину u нашего частично упорядоченного множества M , в которую не входит ни одной стрелки. По предположению индукции если m — размер максимальной антицепи в $M \setminus \{u\}$, то тогда $M \setminus \{u\}$ разбивается на m непересекающихся цепей: $M \setminus \{u\} = C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_m$. Назовём элемент $x \in M \setminus \{u\}$ *интересным*, если он лежит в какой-нибудь максимальной антицепи множества $M \setminus \{u\}$.

(а) Обозначим через x_i наибольший (относительно частичного порядка) интересный элемент цепи C_i . Докажите, что $\{x_1, \dots, x_m\}$ — антицепь.

(б) Попытайтесь добавить вершину u к антицепи $\{x_1, \dots, x_m\}$ и завершите доказательство теоремы Дилуорса.

Задачи

3. Для данных натуральных r и s покажите, что любая последовательность различных чисел длины $rs + 1$ содержит монотонно возрастающую подпоследовательность длины $r + 1$ или монотонно убывающую длины $s + 1$.
4. У хозяйки дома есть 100 пакетов. Известно, что среди любых 10 пакетов один из пакетов лежит в другом. Докажите, что можно выбрать 11 пакетов так, чтобы первый пакет лежал во втором, второй — в третьем, ..., десятый — в одиннадцатом.
5. В чемпионате по футболу участвуют 30 команд разной силы игры, и футбольный эксперт точно знает, как именно команды упорядочены по силе. За одну операцию разрешается предложить эксперту список из трёх команд, и он на своё усмотрение назовёт либо самую сильную, либо самую слабую команду из этих трёх (при этом дополнительно сообщив, сильную или слабую команду он назвал). Определите максимально число k , для которого с помощью нескольких

операций можно найти такую последовательность команд $T_1, T_2, \dots, T_k$, что для всех $1 \leq i < j \leq k$ команда T_i гарантированно слабее команды T_j .

6. Рассмотрим все прямоугольники с целыми сторонами, не превосходящими 1000. Какое максимальное количество таких прямоугольников можно выделить, чтобы ни один из них нельзя было поместить в другой так, чтобы их стороны были попарно параллельны?
7. Рёбра полного ориентированного графа на $n^2 + 1$ вершине раскрашены в два цвета, причём одноцветных циклов нет. Докажите, что в графе существует одноцветный путь длины n .
8. Какое наибольшее число шашек можно расставить в клетках таблицы $n \times n$ так, чтобы выполнялось условие: если шашка A находится ниже и правее шашки B , то они находятся в соседних по диагонали клетках?
9. Вершины графа покрашены в k цветов правильным образом, при этом в $k - 1$ цвет их покрасить нельзя. Цвета перенумерованы числами от 1 до k . Докажите, что можно выбрать путь, состоящий из k вершин, в котором i -я вершина была бы покрашена в i -й цвет.

Упорядочивание

1. Из целых чисел от 0 до 1000 выбрали 101 число. Докажите, что среди модулей их попарных разностей есть десять различных чисел, не превосходящих 100.
2. 500 яблок лежат в нескольких корзинах. Разрешается убирать корзины и вынимать яблоки из корзин. Докажите, что можно добиться того, чтобы во всех оставшихся корзинах было поровну яблок, а общее число яблок было не меньше 100.
3. В наборе несколько гирь, все веса которых различны. Известно, что если положить любую пару гирь на левую чашу, можно весы уравновесить, положив на правую чашу одну или несколько гирь из остальных. Найдите наименьшее возможное число гирь в наборе.
4. На кольцевом треке $2N$ велосипедистов стартовали одновременно из одной точки и поехали постоянными различными скоростями (в одну сторону). Если после старта два велосипедиста снова оказываются одновременно в одной точке, назовем это встречей. До полудня каждые два велосипедиста встретились хотя бы раз, при этом никакие три или больше не встречались одновременно. Докажите, что до полудня у каждого велосипедиста было не менее N^2 встреч.
5. Назовем *ожерельем* с l бусинками граф, состоящий из l циклов, сцепленных в одну цепочку. Докажите, что если граф G не содержит ожерелий с l бусинками, то вершины G можно правильно покрасить в $2l$ цветов.
6. Последовательность чисел $a_1, \dots, a_k$ назовём *чашкой*, если $a_1 - a_2 \geq a_2 - a_3 \geq \dots \geq a_{k-1} - a_k$, и *крышкой*, если $a_1 - a_2 \leq a_2 - a_3 \leq \dots \leq a_{k-1} - a_k$. Пусть $k, l \geq 2$ – натуральные числа. Обозначим через $f(k, l)$ наименьшее такое N , что в любой последовательности чисел $a_1, a_2, \dots, a_N$ найдется либо чашка размера k , либо крышка размера l .
 - (а) Докажите неравенство $f(k, l) \leq f(k-1, l) + f(k, l-1) - 1$.
 - (б) Докажите неравенство $f(k, l) \leq C_{k+l-4}^{l-2} + 1$.
 - (в) Постройте последовательность длины C_{k+l-4}^{l-2} , которая не содержит ни чашек размера k , ни крышек размера l .

Часть III

Материалы группы 9-3

Симметрические многочлены: теория

Многочлен $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется **симметрическим**, если его значение не меняется при любой перестановке аргументов $x_1, \dots, x_n$.

Элементарными симметрическими многочленами $\sigma_k(x_1, \dots, x_n)$ называются многочлены

$$\sigma_k(x_1, \dots, x_n) := \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}.$$

Например, $\sigma_1(x_1, \dots, x_n) = x_1 + \dots + x_n$ и $\sigma_n(x_1, \dots, x_n) = x_1 x_2 \dots x_n$.

1. Выразите через элементарные симметрические многочлены от x, y, z

- (а) $x^3 + y^3 + z^3$;
- (б) $x^2 y + y^2 z + z^2 x + x y^2 + y z^2 + z x^2$;
- (в) $x^3 y^3 + y^3 z^3 + z^3 x^3$.

Основная теорема о симметрических многочленах. Любой симметрический многочлен можно единственным образом представить в виде многочлена от элементарных симметрических многочленов.

Моном $a x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$ считается **лексикографически больше** монома $b x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \dots x_n^{\beta_n}$, если существует такой индекс $m \leq n$, что $\alpha_i = \beta_i$ для всех $i < m$ и $\alpha_m > \beta_m$.

Ненулевой моном многочлена P называется **старшим**, если он лексикографически больше любого другого ненулевого монома многочлена P .

2. (а) Докажите, что старший моном произведения двух многочленов равен произведению старших мономов этих многочленов.

(б) Докажите, что для любого монома $q = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$ такого, что $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_n$, есть единственный набор чисел $\beta_1, \dots, \beta_n \geq 0$ такой, что старший моном многочлена $\sigma_1^{\beta_1} \sigma_2^{\beta_2} \dots \sigma_n^{\beta_n}$ совпадает с q .

(в) Докажите основную теорему о симметрических многочленах.

3. (а) Дан многочлен $P(x)$ степени n с рациональными коэффициентами. Пусть $a_1, a_2, \dots, a_n$ — его корни (возможно, комплексные). Также дан симметрический многочлен $Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$ с рациональными коэффициентами. Докажите, что число $Q(a_1, a_2, \dots, a_n)$ рационально.

(б) Докажите, что число $Q(a_1, a_2, \dots, a_n)$ целое, если про P известно, что он приведенный, имеет целые коэффициенты, а симметрический многочлен Q также имеет целые коэффициенты.

4. Многочлен $x^{2026} + y^{2026}$ выразили через элементарные симметрические как $P(x + y, xy)$. Найдите сумму коэффициентов многочлена P .

5. Про вещественные числа $a < b < c$ и $x < y < z$ известно, что $a + b + c = x + y + z$, $ab + bc + ca = xy + yz + zx$ и что $a < x$. Докажите, что $c < z$.

Симметрические многочлены: задачи

- (а) Юлий Васильевич загадал три числа, после чего сообщил Юрию Германовичу их сумму, сумму квадратов и сумму кубов. Сможет ли Юрий Германович восстановить исходные числа?

(б) А Евгению Сергеевичу Юлий Васильевич сообщил сумму чисел, сумму квадратов и сумму четвёртых степеней. Сможет ли Евгений Сергеевич восстановить исходные числа?

(в) А если Юлий Васильевич загадает n чисел и сообщит их сумму, сумму их квадратов, сумму кубов, $\dots$, сумму n -х степеней?
- В таблицу 3×3 записано девять чисел. Известно, что шесть чисел — суммы строк и суммы столбцов таблицы — равны между собой. Докажите, что сумма произведений строк таблицы равна сумме произведений её столбцов.
- Докажите, что сумма 2026-х степеней всех чисел вида

$$1 \pm \sqrt{2} \pm \dots \pm \sqrt{2026}$$

является целым числом.

Однородные симметрические неравенства: Мюрхед

Определение. Пусть дан набор целых неотрицательных чисел $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, такой что $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_n$. Введём обозначение следующего симметрического многочлена от переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$:

$$T_\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{sym} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n},$$

где суммирование ведётся по всем возможным перестановкам переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Примеры.

- $T_{(2,1,0)}(x, y, z) = x^2y + xy^2 + y^2z + yz^2 + z^2x + xz^2$;
- $T_{(1,1,1)}(x, y, z) = 6xyz$;
- $T_{(1,1,0)}(x, y, z) = 2xy + 2yz + 2zx$.

Ещё определение. Пусть даны два набора целых неотрицательных чисел $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ и $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$, такие что $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_n$, $\beta_1 \geq \beta_2 \geq \dots \geq \beta_n$ и $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n$. Тогда будем говорить, что α *мажорирует* β (обозначается как $\alpha \succ \beta$), если для любого $1 \leq k \leq n$ верно

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i \geq \sum_{i=1}^k \beta_i.$$

Неравенство Мюрхеда. Пусть $\alpha \succ \beta$. Тогда для любых неотрицательных $x_1, x_2, \dots, x_n$ верно:

$$T_\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq T_\beta(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Дружеский совет. Если у вас неоднородное неравенство, то сделайте его однородным.

1. Для неотрицательных чисел x, y, z докажите неравенство

$$(x+y)(y+z)(z+x) + xyz \leq 3(x^3 + y^3 + z^3).$$

2. Для неотрицательных чисел x, y, z , таких что $x+y+z = 1$, докажите неравенство

$$1 + x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz \geq 4(xy + yz + zx).$$

3. Для неотрицательных чисел x, y, z , таких что $x^2 + y^2 + z^2 = 3$, докажите неравенство

$$x + y + z \geq xy + yz + zx.$$

4. Для положительных a, b, c, d докажите неравенство

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{4}} \geq \sqrt[3]{\frac{abc + bcd + cda + dab}{4}}.$$

5. Для неотрицательных чисел a, b, c верно $a + b + c = ab + bc + ac$. Докажите, что

$$a + b + c + 1 \geq 4abc.$$

6. Для положительных чисел a, b и c , удовлетворяющих условию $a + b + c = 1$, докажите неравенство

$$\frac{1+a}{1-a} + \frac{1+b}{1-b} + \frac{1+c}{1-c} \leq 2 \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \right).$$

7. Сумма положительных чисел a, b, c равна 1. Докажите, что

$$\frac{1}{a+bc} + \frac{1}{b+ca} + \frac{1}{c+ab} \geq \frac{7}{1+abc}.$$

Однородные симметрические неравенства: Шур.

Неравенство Шура. Для положительных x, y, z и натурального n верно

$$\sum_{sym} x^{n+2} + \sum_{sym} x^n yz \geq 2 \sum_{sym} x^{n+1} y.$$

В частности при $n = 1$:

$$x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \geq x^2y + xy^2 + y^2z + yz^2 + z^2x + xz^2.$$

Творческая задача №0. Докажите неравенство Шура.

1. Для неотрицательных чисел x, y, z , таких что $x + y + z = 1$, докажите неравенство

$$1 + 9xyz \geq 4(xy + yz + zx).$$

2. Для $x, y, z \geq 0$, таких что $x + y + z = 1$, докажите неравенство

$$xy + yz + zx - 2xyz \leq \frac{7}{27}.$$

3. Для положительных чисел a, b и c докажите неравенство

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq \frac{a+b}{c+a} + \frac{b+c}{a+b} + \frac{c+a}{b+c}.$$

4. Для положительных чисел a, b, c докажите неравенство

$$108 \cdot (ab + bc + ca) \leq \left(\sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a} \right)^4.$$

5. Сумма положительных чисел x, y, z равна 1. Докажите, что

$$\left(\frac{x-yz}{x+yz} \right)^2 + \left(\frac{y-zx}{y+zx} \right)^2 + \left(\frac{z-xy}{z+xy} \right)^2 \geq \frac{3}{4}.$$

6. Для положительных a, b, c, d докажите, что

$$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + 2abcd \geq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2d^2 + d^2a^2 + a^2c^2 + b^2d^2.$$

pqr -метод lite

Для данных a, b, c положим $p := a + b + c$, $q := ab + bc + ca$, $r := abc$.

Будем фиксировать p, q и варьировать r так, чтобы переменные a, b, c оставались неотрицательными.

Теорема. (i) Число r принимает наибольшее значение, когда среди a, b, c есть одинаковые числа.

(ii) Число r принимает наименьшее значение, когда среди a, b, c есть одинаковые числа или одно из чисел a, b, c равно нулю.

Пример. Доказать для неотрицательных a, b, c таких, что $a + b + c = ab + bc + ca$, неравенство

$$a + b + c + 1 \geq 4abc.$$

Набросок решения. Зафиксируем $p = q$. Неравенство относительно p, q, r записывается как $p + 1 \geq 4r$. Поскольку неравенство линейно относительно r , достаточно проверить крайний случай — когда r наибольшее. Таким образом, можно считать, что $a = b$, а для таких a, b, c неравенство верно (далее должна идти проверка).

1. Докажите теорему.
2. Для положительных чисел a, b, c таких, что $a + b + c = 1$, докажите, что

$$(1 - a)(1 - b)(1 - c) \geq 8abc.$$

3. Для неотрицательных чисел a, b, c с суммой 3 докажите, что

$$\frac{1}{9 - ab} + \frac{1}{9 - bc} + \frac{1}{9 - ca} \leq \frac{3}{8}.$$

4. Для положительных чисел a, b, c докажите, что

$$\frac{1}{a^2 + b^2} + \frac{1}{b^2 + c^2} + \frac{1}{c^2 + a^2} \geq \frac{10}{(a + b + c)^2}.$$

5. Для неотрицательных чисел a, b, c таких, что $ab + bc + ca = 1$, докажите, что

$$\frac{1}{(a + b)^2} + \frac{1}{(b + c)^2} + \frac{1}{(c + a)^2} \geq \frac{9}{4}.$$

6. Для неотрицательных чисел a, b, c докажите, что

$$a^5 + b^5 + c^5 + abc(ab + bc + ca) \geq a^2b^2(a + b) + b^2c^2(b + c) + c^2a^2(c + a).$$

7. Для чисел $a, b, c \geq 1$ с суммой 9 докажите, что $\sqrt{ab + bc + ca} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$.

8. Для чисел $a, b, c, d > 0$, в сумме дающих 3, докажите, что

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2} \leq \frac{1}{a^2b^2c^2d^2}.$$

Двойное отношение

Двойным отношением четвёрки точек A, B, C, D , лежащих на одной прямой, называется число

$$(A, B; C, D) = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} : \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}}.$$

А именно, это отношение отношений, в которых точки C и D делят отрезок AB .

Двойным отношением прямых a, b, c, d , пересекающихся в одной точке, называется число

$$(a, b; c, d) = \frac{\sin \angle(\vec{a}, \vec{c})}{\sin \angle(\vec{c}, \vec{b})} : \frac{\sin \angle(\vec{a}, \vec{d})}{\sin \angle(\vec{d}, \vec{b})},$$

где $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ — произвольные векторы, направленные вдоль соответствующих прямых, $\angle(\vec{a}, \vec{b})$ — ориентированный угол (с точностью до 2π).

Утверждение. Прямые a, b, c, d пересекаются в одной точке, прямая ℓ пересекает их в различных точках A, B, C, D соответственно. Тогда $(a, b; c, d) = (A, B; C, D)$.

Четвёрка точек или прямых называется *гармонической*, если их двойное отношение равно -1 . Примеры:

- A, B, M, ∞ , где M — середина отрезка AB ;
- B, C, A_1, A_2 , где AA_1, BB_1, CC_1 — чевианы, пересекающиеся в одной точке, A_2 — точка пересечения прямых B_1C_1 и BC .

Утверждение. Про точки A, B, C, D, D_1 , лежащие на одной прямой, известно, что $(A, B; C, D) = (A, B; C, D_1)$. Тогда $D = D_1$.

1. Известно, что $(A, B; C, D) = \lambda$. Найдите $(B, A; C, D)$, $(A, B; D, C)$ и $(A, C; B, D)$. Осознайте, что с помощью этого можно найти двойное отношение для любой перестановки точек.
2. Докажите, что следующие четвёрки гармонические:
 - (а) a, b, c, d , где прямые c и d — внутренняя и внешняя биссектрисы угла между прямыми a и b ;
 - (б) такие точки A, B, C, D , что для середины M отрезка AB выполнено равенство $MA^2 = \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD}$.
3. Прямые a, b, c, d пересекаются в одной точке. Докажите, что если $c \perp d$ и $(a, b; c, d) = -1$, то c и d — биссектрисы углов, образованных прямыми a и b .
4. Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке R , продолжения сторон AB и CD — в точке P , а продолжения сторон BC и AD — в точке Q .
 - (а) Прямая, проходящая через точку R , пересекает прямые AB, BC, CD, DA в точках M, X, N, Y . Докажите, что R делит пополам отрезок MN тогда и только тогда, когда R делит пополам отрезок XY .

- (б) Обозначим через T проекцию точки R на прямую PQ . Докажите, что противоположные стороны четырёхугольника видны из точки T под равными углами.
5. В треугольнике ABC проведена биссектриса AL и биссектриса внешнего угла AN . Точка M — середина стороны AC , P — точка пересечения прямых AB и ML . Докажите, что $PA = PN$.
6. Пусть H_a и L_a — основание высоты и биссектрисы треугольника ABC , проведённых из вершины A ; вписанная и внеписанная окружности касаются стороны BC в точках K_a и T_a соответственно.
- (а) Докажите, что $(H_a, L_a; K_a, T_a) = -1$;
- (б) Пусть I и I_a — центр вписанной и внеписанной окружностей треугольника ABC . Докажите, что прямые H_aI и H_aI_a симметричны относительно прямой BC .
- (в) Определим аналогично точки H_b, L_b, K_b, T_b . Докажите, что прямые $H_aH_b, L_aL_b, T_aT_b, K_aK_b$ пересекаются в одной точке.
7. В треугольнике ABC высоты BB_1 и CC_1 пересекаются в точке H , точка M — середина стороны BC , а X — точка пересечения внутренних касательных к окружностям, вписанным в треугольники BMC_1 и $СMB_1$. Докажите, что точки X, M и H лежат на одной прямой.
8. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Точки Q, A, B, P лежат на одной прямой именно в таком порядке. Прямая AC касается окружности (ADQ) , а прямая BD касается окружности (BCP) . Точки M и N — середины сторон BC и AD соответственно. Докажите, что следующие касательная к (ANQ) в точке A , касательная к (BMP) в точке B пересекаются на прямой CD .

Двойное отношение. Добавка

1. В треугольнике ABC отметили середину M стороны AB . Вторую точку пересечения BC с описанной окружностью треугольника AMC обозначим за X . Рассмотрим также окружность ω , касающуюся AC в точке C и проходящую через X . Далее, прямая XM пересекает ω в точке Z и AC в точке Y так, что A лежит между C и Y). Докажите, что AX , BY , CZ проходят через одну точку.
2. На сторонах AB , AC , BC , BC треугольника ABC отмечены точки B' , C' , P , Q соответственно. AP , AQ симметричны относительно биссектрисы угла A , $B'C' \parallel BC$. AP , AQ пересекают $B'C'$ в точках P' , Q' . Пусть X и Y — точки пересечения пар прямых BP' и QC' , PB' и CQ' соответственно. Докажите, что XY касается описанной окружности треугольника ABC .

Двойные отношения на окружности

Определение. *Двойным отношением* $(A, B; C, D)$ различных точек A, B, C, D , лежащих на одной окружности, называют величину $(PA, PB; PC, PD)$, где P — произвольная точка той же окружности.

Эта величина не зависит от выбора точки P . Точка P может совпадать с одной из точек A, B, C, D , тогда соответствующая секущая вырождается в касательную к окружности.

Утверждение. При инверсии сохраняется двойное отношение четырёх точек, лежащих на обобщённой окружности.

Из этого следует, что двойное отношение сохраняется при проекции с окружности на себя: если через точку P проведены четыре секущие, пересекающие окружность в точках A и A_1 , B и B_1 , C и C_1 , D и D_1 , то $(A, B; C, D) = (A_1, B_1; C_1, D_1)$ (но оно не обязательно равно двойному отношению прямых PA, PB, PC, PD).

Определение. Вписанный четырёхугольник $ABCD$ называется *гармоническим*, если $(A, C; B, D) = -1$.

1. Из точки P провели касательные PX и PY к окружности ω и секущую, которая пересекла ω в точках A и B , а прямую XY — в точке C . Докажите, что
(а) $(A, B; X, Y) = -1$; (б) $(A, B; C, P) = -1$.
2. Биссектриса внутреннего угла при вершине A треугольника ABC пересекает (ABC) в точке D , а биссектриса внешнего угла пересекает BC в точке E . Симедиана, поведённая из вершины A , пересекает (ABC) в точке L . Докажите, что D, E, L лежат на одной прямой.
3. Дан треугольник ABC и точка M . Прямая, проходящая через M , пересекает AB, BC, CA в C_1, A_1, B_1 соответственно. Прямые AM, BM, CM пересекают окружность (ABC) в точках A_2, B_2, C_2 соответственно. Докажите, что A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 пересекаются в одной точке, лежащей на (ABC) .
4. (а) **Теорема о бабочке.** Хорды AC и BD окружности ω проходят через середину хорды MN . Отрезки AD и BC пересекают отрезок MN в точках X и Y . Докажите, что $XM = YN$.
(б) **Теорема о двойной бабочке.** На хорде MN окружности ω отмечены точки M_1 и N_1 такие, что $MM_1 = NN_1$. Хорда AC проходит через точку M_1 , а хорда BD — через точку N_1 . Отрезки AD и BC пересекают MN в точках X и Y соответственно. Докажите, что $XM = YN$.
5. Окружности $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ касаются друг друга внешним образом по циклу. Окружность ω касается их всех внешним образом в точках X_1, X_2, X_3, X_4 соответственно. Докажите, что $X_1X_2X_3X_4$ образуют гармонический четырёхугольник.

6. Из точки P вне окружности ω проведены касательные PX и PY и две секущие, пересекающие окружность в точках A и B , C и D . Докажите, что точки пересечения прямых AC и BD , AD и BC лежат на прямой XY .
7. Окружность проходит через вершины B и C треугольника ABC и повторно пересекает отрезки AB и AC в точках C_1 и B_1 соответственно. Отрезки BB_1 и CC_1 пересекаются в точке P , прямая AP пересекает отрезок BC в точке A_1 . Докажите, что окружность $(A_1B_1C_1)$ проходит через середину отрезка BC .
8. Докажите, что точка Лемуана треугольника ABC (т. е. точка пересечения симедиан) лежит на прямой, соединяющей середину высоты из вершины A с серединой стороны BC .
9. Биссектрисы углов B и C треугольника ABC пересекаются в точке I и пересекают окружность (ABC) в точках B_1 и C_1 соответственно. Точка D — середина дуги BAC . Окружности ω_b и ω_c касаются прямых AB и AC соответственно и окружности (ABC) внутренним образом в точках B_1 и C_1 соответственно. Докажите, что прямая, проходящая через точки пересечения ω_b и ω_c , пересекается с прямой DI на (ABC) .

Добавка

1. Четырёхугольник $ABCD$ описан около окружности, лучи BA и CD пересекаются в точке E , лучи BC и AD — в точке F . Вписанная окружность треугольника, образованного прямыми AB , CD и биссектрисой угла B , касается прямой AB в точке K , а вписанная окружность треугольника, образованного прямыми AD , BC и биссектрисой угла B , касается прямой BC в точке L . Докажите, что прямые KL , AC и EF пересекаются в одной точке.
2. Внутри треугольника ABC на биссектрисе угла A выбрана произвольная точка J . Лучи BJ и CJ пересекают стороны AC и AB в точках K и L соответственно. Касательная к окружности (AKL) в точке A пересекает прямую BC в точке P . Докажите, что $PA = PJ$.
3. В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC проведены высоты BH_B , CH_C и биссектрисы BL_B , CL_C . Точки I_B , I_C — центры вневписанных окружностей напротив вершин B и C соответственно, точка O — центр описанной окружности. Прямые I_BH_C и I_CH_B пересекаются в точке X . Докажите, что $OX \perp L_BL_C$.

Добавка

1. Вписанная окружность ω треугольника ABC с центром в I касается сторон AC и AB в точках E и F соответственно. Пусть M и N — точки пересечения EF с (ABC) , причём M лежит на «малой дуге» AB . Пусть S — точка пересечения касательных к (ABC) в точках A и M . Касательные из M к ω повторно пересекают Ω в точках L и K . Пусть R — точка пересечения EF и KL , а T — пересечение касательных к (ABC) в точках B и C . Докажите, что I — инцентр треугольника RST .
2. В четырёхугольник $ABCD$ вписана окружность с центром в I . Докажите, что ортоцентры треугольников ABI , BCI , CDI и DAI лежат на одной прямой, проходящей через точку пересечения диагоналей $ABCD$.

Поляры

Определение. Дана окружность ω с центром O и точка P . *Полярной* точки P относительно ω называется прямая ℓ , которая проходит через инверсную точку P' перпендикулярно прямой OP . Точка P называется *полюсом* прямой ℓ .

Полюсом бесконечно удалённой прямой будем считать центр окружности. Полюсом прямой ℓ , проходящей через центр ω , будем считать бесконечно удалённую точку, соответствующую перпендикулярному ℓ направлению.

Таким образом, мы задали биекцию между точками и прямыми на проективной плоскости. Замена точек на соответствующие им прямые и наоборот называется *полярным преобразованием*.

- Если точка P лежит вне ω , то её полярна — это прямая XY , где PX и PY — касательные к ω .
 - Если A лежит на поляре B , то B лежит на поляре A .
 - Через точку P проведена секущая, пересекающая окружность ω в точках A и B , а её полярю — в точке C . Тогда $(A, B; C, P) = -1$.
 - Пусть через точки P проведены две секущие, пересекающие окружность в точках A и B , C и D . Тогда точки пересечения прямых AC и BD , AD и BC лежат на поляре точки P относительно ω .
 - Точки A, B, C лежат на одной прямой $\iff$ их полярны a, b, c пересекаются в одной точке.
1. Четырёхугольник вписан в окружность с центром O . Обозначим точки пересечения противоположных сторон и точку пересечения диагоналей четырёхугольника через P, Q и R . Докажите, что O — ортоцентр треугольника PQR .
 2. На окружности даны точки A, B, C, X и Y . Прямые AX и BY пересекаются в точке C_1 , а прямые AY и BX — в точке C_2 . Аналогично определяются точки B_1, B_2 и A_1, A_2 . Докажите, что прямые A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 пересекаются в одной точке.
 3. (а) Вписанная окружность описанного четырёхугольника $ABCD$ касается его сторон AB, BC, CD, DA в точках K, L, M, N соответственно. Прямые AB и CD пересекаются в точке P , прямые AD и BC — в точке Q , прямые KL и MN — в точке R , прямые KN и LM — в точке S . Докажите, что P, Q, R, S лежат на одной прямой.
(б) Докажите, что в описанном четырёхугольнике точка пересечения диагоналей совпадает с точкой пересечения диагоналей четырёхугольника с вершинами в точках касания вписанной окружности со сторонами.
(в) Докажите, что во вписанной-описанном четырёхугольнике точка пересечения диагоналей лежит на прямой, соединяющей центры вписанной и описанной окружностей.

(г) Докажите, что все четырёхугольники, одновременно вписанные в окружность Ω и описанные вокруг окружности ω , имеют общую точку пересечения диагоналей.

4. В треугольнике ABC вписанная окружность ω касается сторон AB и AC в точках C_1 и B_1 . Оказалось, что прямые BC , B_1C_1 и касательная к (ABC) в точке A пересекаются в одной точке D . Докажите, что D лежит на прямой, соединяющей центры ω и (ABC) .
5. Вписанная в треугольник ABC окружность касается сторон BC , CA , AB в точках A_1 , B_1 , C_1 соответственно, точка I — её центр. Докажите, что медиана, проведённая из вершины A , отрезок B_1C_1 и прямая IA_1 пересекаются в одной точке.

Полярное преобразование

- (а) Дана окружность ω с центром в O . Докажите, что полярное преобразование относительно ω сохраняет направленные углы между точками (определите их при помощи O), между прямыми и между точками и прямыми.

(б) При помощи полярного преобразования в точке A передокажите лемму об изогоналях: если AS и AT — изогонали относительно угла BAC , $P = CT \cap BS$ и $Q = CS \cap BT$, то AP и AQ также являются изогоналями относительно угла BAC .
- (а) Дан вписанный четырёхугольник $ABPC$. Обозначим $a = BC, b = CA, c = AB$. Докажите, что $ABPC$ подобен $a'b'Pc'$, где a', b', c' — полюсы соответствующих прямых относительно полярного преобразования с центром в P .

(б) Передокажите теорему о прямой Симсона при помощи композиции полярного преобразования и инверсии.
- Пусть I — центр окружности ω , вписанной в треугольник ABC . Прямая ℓ , отличная от сторон треугольника, касается ω . Точки A_0, B_0, C_0 на ℓ таковы, что

$$\angle AIA_0 = \angle BIB_0 = \angle CIC_0 = 90^\circ.$$

Докажите, что прямые AA_0, BB_0, CC_0 пересекаются в одной точке.

- Теорема Дроз-Фарни.** Пусть ABC — треугольник с ортоцентром H . Прямые p и q перпендикулярны, и обе проходят через H . Прямая p пересекает прямые BC, AC и AB соответственно в точках A_0, B_0, C_0 . Аналогично прямая q пересекает прямые BC, AC и AB соответственно в точках A_1, B_1, C_1 . Докажите, что середины отрезков A_0A_1, B_0B_1 и C_0C_1 коллинеарны.

Соответствия

1. Сколько существует разных способов разбить число 2026 на натуральные слагаемые, которые приблизительно равны? Слагаемых может быть одно или несколько. Числа называются приблизительно равными, если их разность не больше 1. Способы, отличающиеся только порядком слагаемых, считаются одинаковыми.
2. Вадим посчитал число всех цифр в последовательности $1, 2, 3, \dots, 10^k$, а Витя посчитал число всех нулей в последовательности $1, 2, 3, \dots, 10^{k+1}$. Чьё число больше?
3. (а) Докажите, что количество разбиений числа n на слагаемые, равно количеству разбиений числа $2n$ ровно на n слагаемых.
(б) Докажите, что количество разбиений числа n в сумму различных слагаемых равно количеству разбиений числа n в сумму нечётных слагаемых.
4. Пусть A — угловая клетка шахматной доски, B — соседняя с ней по диагонали клетка. Докажите, что число способов обойти всю доску хромой ладьей (ходит на одну клетку по вертикали или горизонтали), начиная с клетки A , больше, чем число способов обойти всю доску хромой ладьей, начиная с клетки B . (Ладья должна побывать на каждой клетке ровно один раз.)
5. Петя подсчитал количество всех возможных m -буквенных слов, в записи которых могут использоваться только четыре буквы Т, О, W и N, причём в каждом слове букв Т и О поровну. Вася подсчитал количество всех возможных $2m$ -буквенных слов, в записи которых могут использоваться только две буквы Т и О, и в каждом слове этих букв поровну. У кого слов получилось больше?
6. На окружности отмечено $2N$ точек (N — натуральное число). Известно, что через любую точку внутри окружности проходит не более двух хорд с концами в отмеченных точках. Назовем паросочетанием такой набор из N хорд с концами в отмеченных точках, что каждая отмеченная точка является концом ровно одной из этих хорд. Назовём паросочетание чётным, если количество точек, в которых пересекаются его хорды, чётно, и нечётным иначе. Найдите разность между количеством чётных и нечётных паросочетаний.
7. Дано натуральное число n . Что больше: число способов разрезать квадрат $3n \times 3n$ на клетчатые прямоугольники 1×3 или число способов разрезать клетчатый квадрат $2n \times 2n$ на доминошки 1×2 ?

Добавка

1. Боковая поверхность параллелепипеда с основанием $a \times b$ и высотой c ($a, b, c \in \mathbb{N}$) оклеена без наложений и пропусков прямоугольниками по клеточкам, причём каждый прямоугольник имеет чётную площадь и может перегибаться по ребру (хоть по всем четырём). Докажите, что если c нечётно, то число способов оклейки чётно.
2. На какую наибольшую степень двойки может делиться число вида $[(3 + \sqrt{10})^n]$?
3. Рассмотрим на клетчатой плоскости такие ломаные с началом в точке $(0, 0)$ и вершинами в точках с целыми координатами, что каждое очередное звено идёт по сторонам клеток либо вверх, либо вправо. Каждой такой ломаной соответствует червяк — фигура, состоящая из клеток плоскости, имеющих хотя бы одну общую точку с этой ломаной. Докажите, что червяков, которых можно разбить на двухклеточные доминошки ровно $n > 2$ различными способами, столько же, сколько натуральных чисел, меньших n и взаимно простых с n . (Червяки разные, если состоят из разных наборов клеток.)

Рекурренты

1. Сколькими способами можно замостить прямоугольную доску размера $2 \times n$ доминошками 1×2 ?
2. Сколькими способами можно замостить прямоугольную доску размера 3×10 триминошками 1×3 ?
3. Садовник, привив черенок редкого растения, оставляет его расти два года, а затем ежегодно берет от него по 6 черенков. С каждым новым черенком он поступает аналогично. Сколько будет растений и черенков на восьмом году роста первоначального растения?
4. Лягушка прыгает по вершинам треугольника ABC , перемещаясь каждый раз в одну из соседних вершин. Сколькими способами она может попасть из A в A за 10 прыжков?
5. *Бинарным деревом* называются корневые деревья, у каждой вершины которого либо 2 потомка, либо 0. Найдите количество бинарных деревьев с 8 листьями.
6. Сколько 10-значных чисел удовлетворяют следующим условиям: все цифры числа принадлежат множеству 1, 2, 3, 4, 5, а любые две соседние цифры отличаются на 1?
7. Археолог нашёл n золотых монет. Из старых текстов он выяснил, что одна из них фальшивая и она легче подлинных. В распоряжении археолога есть только платные весы. Если одна чаша перевешивает другую, то археолог должен будет заплатить 1 фунт, и 2 фунта в случае равновесия. При каком наибольшем n можно найти фальшивую монету, заплатив не более 10 фунтов?

Рекурренты-2

Определение. Последовательность чисел $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$, которая удовлетворяет соотношению

$$a_{n+k} = t_1 a_{n+k-1} + t_2 a_{n+k-2} + \dots + t_k a_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (\star)$$

при некоторых фиксированных $t_1, \dots, t_k$, называется *линейной рекуррентной* (возвратной) последовательностью k -ого порядка.

Уравнение

$$x^k - t_1 x^{k-1} - t_2 x^{k-2} - \dots - t_k = 0$$

называется *характеристическим уравнением* последовательности $\{a_n\}$.

1. (а) Докажите, что если последовательность $\{a_0, a_1, \dots\}$ удовлетворяет соотношению $(\star)$, то последовательность $\{\lambda a_0, \lambda a_1, \dots\}$ также удовлетворяет соотношению $(\star)$.
- (б) Докажите, что если последовательности $\{a_0, a_1, \dots\}$ и $\{b_0, b_1, \dots\}$ удовлетворяет соотношению $(\star)$, то последовательность $\{a_0 + b_0, a_1 + b_1, \dots\}$ также удовлетворяет соотношению $(\star)$.
- (в) Докажите, что геометрическая прогрессия $\{a_n\} = x_0^n$ удовлетворяет соотношению $(\star)$ тогда и только тогда, когда x_0 — корень характеристического уравнения.
- (г) Пусть квадратное характеристическое уравнение последовательности $\{a_n\}$ имеет различные корни x_1 и x_2 . Докажите, что при фиксированных a_0, a_1 существует ровно одна пара чисел c_1, c_2 такая, что для любого $n \geq 0$ верно равенство

$$a_n = c_1 x_1^n + c_2 x_2^n.$$

2. Найдите явную формулу для чисел Фибоначчи.
3. Лягушка прыгает по вершинам треугольника ABC , перемещаясь каждый раз в одну из соседних вершин. Сколькими способами она может попасть из A в A за n прыжков?
4. Садовник, привив черенок редкого растения, оставляет его расти два года, а затем ежегодно берет от него по 6 черенков. С каждым новым черенком он поступает аналогично. Сколько будет растений и черенков на n году роста первоначального растения?
5. Некто взял в ипотеку S рублей. Каждый месяц долг банку растёт на $a\%$, а затем должник платит в банк M рублей. Сколько должник будет должен банку через n месяцев?

ЧУМЫ

Определение. *Частично упорядоченным множеством* называют ориентированный граф без петель и кратных стрелок, для которого выполнено свойство транзитивности: для любых трех вершин u, v, w таких, что $u \longrightarrow v$ и $v \longrightarrow w$, верно $u \longrightarrow w$.

Определение. *Цепью* называется последовательность вершин вида $v_1 \longrightarrow v_2 \longrightarrow \dots \longrightarrow v_n$. *Антицепью* называется набор вершин, попарно не соединённых рёбрами.

Теория

1. (а) **Теорема Мирского.** Докажите, что в частично упорядоченном множестве размер максимальной цепи равен минимальному количеству антицепей, на которые оно разбивается. (б) Докажите, что в частично упорядоченном множестве количество элементов не больше размера максимальной антицепи, умноженного на размер максимальной цепи.

Теорема Дилуорса. В частично упорядоченном множестве размер максимальной антицепи равен минимальному количеству цепей, на которые оно разбивается.

2. Рассмотрим какую-то вершину u нашего частично упорядоченного множества M , в которую не входит ни одной стрелки. По предположению индукции если m — размер максимальной антицепи в $M \setminus \{u\}$, то тогда $M \setminus \{u\}$ разбивается на m непересекающихся цепей: $M \setminus \{u\} = C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_m$. Назовём элемент $x \in M \setminus \{u\}$ *интересным*, если он лежит в какой-нибудь максимальной антицепи множества $M \setminus \{u\}$.

(а) Обозначим через x_i наибольший (относительно частичного порядка) интересный элемент цепи C_i . Докажите, что $\{x_1, \dots, x_m\}$ — антицепь.

(б) Попытайтесь добавить вершину u к антицепи $\{x_1, \dots, x_m\}$ и завершите доказательство теоремы Дилуорса.

Задачи

3. Для данных натуральных r и s покажите, что любая последовательность различных чисел длины $rs + 1$ содержит монотонно возрастающую подпоследовательность длины $r + 1$ или монотонно убывающую длины $s + 1$.
4. У хозяйки дома есть 100 пакетов. Известно, что среди любых 10 пакетов один из пакетов лежит в другом. Докажите, что можно выбрать 11 пакетов так, чтобы первый пакет лежал во втором, второй — в третьем, ..., десятый — в одиннадцатом.
5. В чемпионате по футболу участвуют 30 команд разной силы игры, и футбольный эксперт точно знает, как именно команды упорядочены по силе. За одну операцию разрешается предложить эксперту список из трёх команд, и он на своё усмотрение назовёт либо самую сильную, либо самую слабую команду из этих трёх (при этом дополнительно сообщив, сильную или слабую команду он назвал). Определите максимально число k , для которого с помощью нескольких

операций можно найти такую последовательность команд $T_1, T_2, \dots, T_k$, что для всех $1 \leq i < j \leq k$ команда T_i гарантированно слабее команды T_j .

6. Рассмотрим все прямоугольники с целыми сторонами, не превосходящими 1000. Какое максимальное количество таких прямоугольников можно выделить, чтобы ни один из них нельзя было поместить в другой так, чтобы их стороны были попарно параллельны?
7. Рёбра полного ориентированного графа на $n^2 + 1$ вершине раскрашены в два цвета, причём одноцветных циклов нет. Докажите, что в графе существует одноцветный путь длины n .
8. Вершины графа покрашены в k цветов правильным образом, при этом в $k - 1$ цвет их покрасить нельзя. Цвета перенумерованы числами от 1 до k . Докажите, что можно выбрать путь, состоящий из k вершин, в котором i -я вершина была бы покрашена в i -й цвет.

Упорядочивание

1. Из целых чисел от 0 до 1000 выбрали 101 число. Докажите, что среди модулей их попарных разностей есть десять различных чисел, не превосходящих 100.
2. 500 яблок лежат в нескольких корзинах. Разрешается убирать корзины и вынимать яблоки из корзин. Докажите, что можно добиться того, чтобы во всех оставшихся корзинах было поровну яблок, а общее число яблок было не меньше 100.
3. В наборе несколько гирь, все веса которых различны. Известно, что если положить любую пару гирь на левую чашу, можно весы уравновесить, положив на правую чашу одну или несколько гирь из остальных. Найдите наименьшее возможное число гирь в наборе.
4. На кольцевом треке $2N$ велосипедистов стартовали одновременно из одной точки и поехали постоянными различными скоростями (в одну сторону). Если после старта два велосипедиста снова оказываются одновременно в одной точке, назовем это встречей. До полудня каждые два велосипедиста встретились хотя бы раз, при этом никакие три или больше не встречались одновременно. Докажите, что до полудня у каждого велосипедиста было не менее N^2 встреч.
5. Назовем *ожерельем* с l бусинками граф, состоящий из l циклов, сцепленных в одну цепочку. Докажите, что если граф G не содержит ожерелий с l бусинками, то
 - (а) вершины G можно покрасить в l цветов так, что в любом цикле нашлись две вершины разных цветов;
 - (б) вершины G можно правильно покрасить в $2l$ цветов.