Куда ты катишься?

1. **(а) Теорема Коперника.** По неподвижной окружности, касаясь её изнутри, катится без скольжения окружность вдвое меньшего радиуса. Какую траекторию описывает фиксированная точка подвижной окружности?

(б) Каркас прямоугольного треугольника ABC едет по плоскости так, что концы его гипотенузы AB скользят по сторонам прямого угла с вершиной O. Какую траекторию описывает вершина C?

(в) Каркас треугольника ABC едет по плоскости так, что концы его стороны AB скользят по сторонам некоторого угла с вершиной O. Какое условие нужно наложить на углы в этой картинке, чтобы получилось разумное обобщение предыдущего пункта?

Определение. Пусть окружность катится без скольжения по неподвижной окружности того же радиуса, тогда траектория фиксированной точки подвижной окружности называется *кардиоидой*.

2. **(а)** Пусть центр O' подвижного круга γ, катящегося по неподвижному кругу ω того же радиуса, делает один оборот. Сколько раз повернётся за это время круг γ (то есть сколько он сделает оборотов вокруг своего центра O')?

(б) Получите эквивалентное определение кардиоиды через шарнирный параллелограмм: если отрезки OP и OQ ($OP = 2OQ$) вращаются вокруг точки O с угловыми скоростями ω и 2ω соответственно, то траектория четвёртой вершины параллелограмма $OPMQ$ — кардиоида.

(в) На окружности ω радиуса r фиксирована точка A. На каждой прямой ℓ, проходящей через A, от точки Q пересечения ℓ с ω ($Q \neq A$) откладывается отрезок QM длины $2r$. Докажите, что ГМТ точек M — кардиоида.

(г) Теорема Коперника наоборот. По неподвижному кругу радиуса r катится без скольжения, охватывая его, круговой обруч радиуса $2r$. Докажите, что траектория фиксированной точки обруча — кардиоида.

Пусть окружность ω радиуса r катится по некоторой кривой γ. Рассмотрим окружность ω' радиуса $2r$, катящуюся по той же кривой γ, с некоторым её диаметром KL (жёстко скреплённым с этой окружностью). Пусть также точка M окружности ω такова, что в какой-то момент она с точкой K попадает в одну и ту же точку кривой γ.

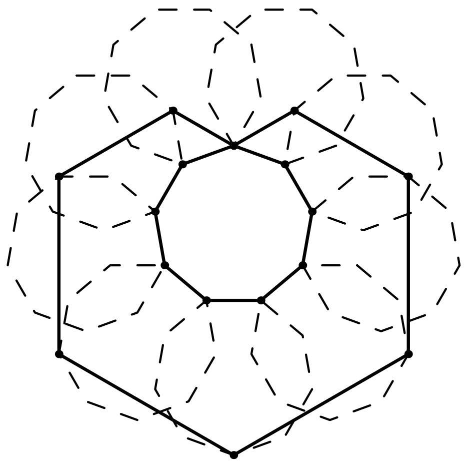
Теорема о двух кругах. В любой момент времени диаметр KL касается траектории точки M. Другими словами, эта траектория служит *огибающей* всех положений диаметра KL.

3*. На окружности ω отмечена точка B. Из неё в произвольную точку окружности попадает луч света и отражается от окружности (угол падения равен углу отражения). Докажите, что огибающая проведённых лучей — кардиоида[1].

4. На столе лежат 123456789 одинаковых монет, образуя замкнутую цепочку, в которой любые две последовательные монеты касаются. Центры монет образуют выпуклый многоугольник. Сколько оборотов сделает монета такого же размера за время, пока она один раз прокатится по внешней стороне всей цепочки?

5. Отмечены две соседние вершины A и B правильного n-угольника ($n \geqslant 5$) с центром в точке O. Треугольник XYZ, равный OAB и изначально совпадающий с ним, начинает ехать по плоскости так, что Y и Z проезжают без проскальзываний всю границу многоугольника, причём точка X всё время остаётся внутри многоугольника. Найдите ГМТ вершин X.

6. Правильный n-угольник со стороной 1 катится по другому такому же n-угольнику, как показано на рисунке. Последовательные положения одной из его вершин в моменты, когда n-угольники имеют общую сторону, образуют замкнутую ломаную κ.



Пример для $n = 9$

Докажите, что κ ограничивает площадь, равную $6A - 2B$, где A, B — площади правильных n-угольников с единичными стороной и радиусом описанной окружности соответственно.

К задаче 3

[1] Могут пригодиться определение кардиоиды и теорема о двух кругах