

Окружность Аполлония

Утверждение. Пусть фиксированы точки A и B и положительное число $k \neq 1$. Тогда геометрическим местом точек X таких, что $AH : HB = k$ является окружность. Она называется *окружностью Аполлония*.

В контексте треугольника можно рассматривать окружность Аполлония для точек B и C и $k = BA/CA$ (будем называть её A -окружностью Аполлония) и две аналогичных окружности.

Теория

- (а) Докажите, что три окружности Аполлония треугольника ABC имеют две общие точки (они называются *точками Аполлония*).

(б) Докажите, что точки пересечения касательных к описанной окружности треугольника в вершинах с противоположными сторонами лежат на одной прямой.

(в) Докажите, что точки Аполлония инверсны относительно описанной окружности.
- Докажите, что прямая, проходящая через точки Аполлония треугольника ABC , проходит через

(а) центр (ABC) ;

(б) точку Лемуана треугольника (точку пересечения симедиан);

(в) ортоцентр треугольника с вершинами в основаниях внутренних биссектрис треугольника.
- (а) Обозначим одну из точек Аполлония треугольника ABC через P . Прямые AP , BP , CP пересекают описанную окружность в точках A_1 , B_1 , C_1 соответственно. Докажите, что треугольник $A_1B_1C_1$ правильный.

(б) Углы треугольника меньше 120° . Докажите, что одна из точек Аполлония треугольника изогонально сопряжена его точке Торричелли (то есть точке, из которой стороны треугольника видны под углами 120°).

(в) Точки A_2 , B_2 , C_2 — проекции точки Аполлония на стороны треугольника ABC . Докажите, что треугольник $A_2B_2C_2$ правильный. Верно ли обратное утверждение: если треугольник с вершинами в проекциях точки X на прямые AB , AC , BC правильный, то X — одна из точек Аполлония?
- Докажите, что точка X принадлежит A -окружности Аполлония тогда и только тогда, когда выполнено равенство

$$\sphericalangle AXB - \sphericalangle ACB = \sphericalangle CXA - \sphericalangle CBA.$$

Задачи

5. Дан треугольник ABC . Точки M и N таковы, что

$$AM : BM : CM = AN : BN : CN.$$

Докажите, что прямая MN проходит через центр описанной окружности треугольника ABC .

6. (*Майский Мастер Математики, 2026*) Дан остроугольный треугольник ABC . В нём проведены высоты AA_1 , BB_1 и CC_1 . Пусть P_a , P_b и P_c — внутренние точки Аполлония треугольников AB_1C_1 , BC_1A_1 и CA_1B_1 соответственно (то есть точки Аполлония, лежащие внутри треугольников). Докажите, что треугольник $P_aP_bP_c$ является равносторонним.
7. Выпуклый четырёхугольник $ABCD$ таков, что $AB \cdot CD = AD \cdot BC$. Докажите, что

$$\angle BAC + \angle CBD + \angle DCA + \angle ADB = 180^\circ.$$