Неевклидова геометрия

Пятый постулат Евклида.[1] Через точку P, не лежащую на прямой a, можно провести ровно одну прямую, не пересекающуюся с a.

Рассмотрим внутренность круга и будем считать прямыми хорды граничной окружности. В такой модели пятый постулат Евклида не выполняется.

1. Докажите, что если два внутренних односторонних угла дают в сумме π, то прямые, отличные от секущей, не имеют общих точек. Выведите из этого, что через точку, не лежащую на прямой l, можно провести хотя бы одну прямую, не пересекающую l.

2. Докажите, что пятый постулат Евклида эквивалентен тому, что сумма углов произвольного треугольника равна π.

Пусть нам дана прямая a и точка P не на прямой a. Опустим из точки P перпендикуляр PH на a. Докажем, что прямая b, проходящая через P и перпендикулярная PH, и есть исходная прямая.

(а) Докажите, что $a \parallel b$.

(б) Пусть c — прямая, проходящая через P, не пересекающая a. Придите к противоречию в предположении, что угол α между прямыми b и c больше, чем $\pi/4$.

(в) Придите к противоречию в случае, когда $\alpha > \pi/8$.

(г) Выведите пятый постулат Евклида.

Далее мы **НЕ** предполагаем истинность пятого постулата Евклида.

Чем можно пользоваться:

- через любые две различные точки проходит ровно одна прямая;
- целое больше части;
- признаки равенства треугольников.

3. Докажите, что внешний угол треугольника больше внутреннего, не смежного с ним.

4. (а) Докажите, что длина перпендикуляра к прямой не больше длины секущей.

(б) Докажите неравенство треугольника.

5. (Четвёртый признак равенства треугольников) Пусть в треугольниках ABC и $A'B'C'$ имеют место равенства $\angle A = \angle A', \angle B = \angle B', BC = B'C'$. Тогда эти треугольники равны.

6. Докажите от противного, что сумма углов в треугольнике не превосходит π.

[1] Точнее, его менее громоздкая версия