

Диагностическая работа

Задача 1. Действительные числа a, b, c, d таковы, что $a + b = cd$ и $c + d = ab$. Докажите неравенство $(a + 1)(b + 1)(c + 1)(d + 1) \geq 0$.

Задача 2. В каждой клетке прямоугольной таблицы 1000×1000 стоит рыцарь или лжец. Рыцарь всегда говорит правду, а лжец всегда лжёт. Каждый заявил, что в клетках, соседних с его клеткой по стороне, стоит поровну лжецов и рыцарей. Может ли на доске быть ровно 2025 рыцарей?

Задача 3. Пусть $ABCD$ — такой выпуклый четырёхугольник, что $\angle ABC = \angle ACD$ и $\angle ACB = \angle ADC$. Известно, центр описанной окружности O треугольника BCD отличен от A . Докажите, что $\angle OAC = 90^\circ$.

Задача 4. На турнир приехало 185 ребят: 93 мальчика и 92 девочки. Оказалось, что каждый мальчик знает по крайней мере 82 девочки. Докажите, что найдутся такие две девочки, что каждый мальчик знает хотя бы одну из них.

Задача 5. Натуральные числа m и n таковы, что при некотором целом x выполнено равенство $(x + m)(x + n) = x + m + n$. Докажите, что $m < 2n$.

Задача 6. Дан остроугольный неравносторонний треугольник ABC . Пусть D — основание высоты, опущенной из A на BC , а M — середина BC . Отмечается единственная такая точка P , лежащая строго внутри треугольника ABC , что $\angle DPM = 90^\circ$ и $PB/PC = AB/AC$. Докажите, что $\angle BPC = 180^\circ - |\angle ABC - \angle ACB|$.