

Диагностическая работа

Задача 1. Действительные числа a, b, c, d таковы, что $a + b = cd$ и $c + d = ab$. Докажите неравенство $(a + 1)(b + 1)(c + 1)(d + 1) \geq 0$.

Решение. Прибавив к обеим частям первого равенства число $c + d + 1$, а к обеим частям второго равенства $-a + b + 1$, получим, что

$$a + b + c + d + 1 = cd + c + d + 1 = (c + 1)(d + 1),$$

$$a + b + c + d + 1 = ab + a + b + 1 = (a + 1)(b + 1).$$

Тогда

$$(a + 1)(b + 1)(c + 1)(d + 1) = (a + b + c + d + 1)^2 \geq 0,$$

что и требовалось доказать. □

Задача 2. В каждой клетке прямоугольной таблицы 1000×1000 стоит рыцарь или лжец. Рыцарь всегда говорит правду, а лжец всегда лжёт. Каждый заявил, что в клетках, соседних с его клеткой по стороне, стоит поровну лжецов и рыцарей. Может ли на доске быть ровно 2025 рыцарей?

Ответ: Нет.

Решение. Заметим, что у клеток, стоящих на границе, но не в углу, три соседних по стороне клетки. Значит, в них могут стоять только лжецы. Следовательно, и в углах могут стоять только лжецы. У остальных клеток ровно 4 соседние по стороне клеток. Значит, у любого рыцаря должно быть два соседа рыцаря и два соседа лжеца. Тогда все рыцари разбиваются на циклы, причём длина каждого цикла чётна. Действительно, при прохождении любого цикла мы сделаем одинаковое число шагов вверх и вниз и одинаковое число шагов влево и вправо. Следовательно, рыцарей в такой таблице может быть только чётное количество. □

Задача 3. Пусть $ABCD$ — такой выпуклый четырёхугольник, что $\angle ABC = \angle ACD$ и $\angle ACB = \angle ADC$. Известно, центр описанной окружности O треугольника BCD отличен от A . Докажите, что $\angle OAC = 90^\circ$.

Решение. Поскольку $\angle ABC + \angle CDA < 180^\circ$, точка A лежит внутри окружности ω , описанной около треугольника BCD . Пусть C', D' — вторые точки пересечения окружности ω с лучами CA и DA соответственно. Тогда по свойству вписанных углов $\angle D'C'C = \angle D'DC = \angle BCC'$, откуда следует, что $BCC'D'$ — равнобедренная трапеция. Поскольку по свойству вписанных углов $\angle C'D'A = \angle ACD = \angle ABC$, получаем, что треугольники $AD'C'$ и ACD подобны по двум углам. Так как $BC = C'D'$, то на самом деле эти треугольники равны. Тогда A — середина хорды CC' окружности ω , откуда следует, что $\angle OAC = 90^\circ$. □

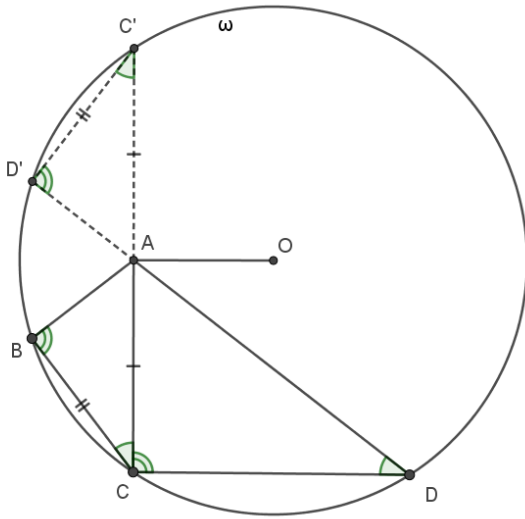


Рис. 1: к задаче 3

Задача 4. На турнир приехало 185 ребят: 93 мальчика и 92 девочки. Оказалось, что каждый мальчик знает по крайней мере 82 девочки. Докажите, что найдутся такие две девочки, что каждый мальчик знает хотя бы одну из них.

Решение. Скажем, что мальчик «портит» пару девочек, если не дружит с обеими девочками. Всего пар девочек ровно C_{92}^2 . С другой стороны, каждый мальчик «портит» не более $C_{10}^2 = 45$ пар девочек. Следовательно, всего мальчики «испортили» не более $93 \cdot 45$ пар. Однако, $93 \cdot 45 < C_{92}^2$, поэтому есть хотя бы одна не испорченная пара девочек. Любая такая пара подходит. \square

Задача 5. Натуральные числа m и n таковы, что при некотором целом x выполнено равенство $(x + m)(x + n) = x + m + n$. Докажите, что $m < 2n$.

Решение. Преобразуем условие: $(x + m)(x + n - 1) = n$. Заметим, что два целых числа $x + m$ и $x + n - 1$ одного и того же знака, причём модуль каждого из них лежит в диапазоне от 1 до n . Тогда их разница также не превосходит n , то есть

$$(x + m) - (x + n - 1) = m - n + 1 \leq n \iff m + 1 \leq 2n,$$

что и требовалось доказать. \square

Задача 6. Дан остроугольный неравносторонний треугольник ABC . Пусть D — основание высоты, опущенной из A на BC , а M — середина BC . Отмечается единственная такая точка P , лежащая строго внутри треугольника ABC , что $\angle DPM = 90^\circ$ и $PB/PC = AB/AC$. Докажите, что $\angle BPC = 180^\circ - |\angle ABC - \angle ACB|$.

Решение. Без ограничения общности будем считать, что $AB < AC$. Пусть точка A' симметрична вершине A относительно BC (см. рис. 2). Переопределим точку P' как

центр поворотной гомотетии, переводящей отрезок AA' в BC . Покажем, что P' совпадает с P . Для этого достаточно проверить два соотношения из условия. По свойству двойственности поворотной гомотетии существует поворотная гомотетия с центром в точке P , переводящая AB в $A'C$. Значит, $\triangle P'AB \sim \triangle P'A'C$, откуда

$$\frac{P'B}{P'C} = \frac{AB}{A'C} = \frac{AB}{AC}.$$

Поскольку $AA' \perp BC$, то угол поворотной гомотетии с центром в P' , переводящей AA' в BC , равен 90° . Поскольку при данной поворотной гомотетии середина D отрезка AA' переходит в середину M отрезка BC , получаем, что $P'D \perp P'M$. Наконец, поскольку P' — центр поворотной гомотетии, переводящей AA' в BC , то P' лежит на описанных окружностях треугольников ABD и CDA' , которые построены на отрезках AB и CA' как на диаметрах, поскольку $\angle ADB = \angle A'DC = 90^\circ$. Но тогда P' — это отличная от D точка пересечения окружностей, построенных на отрезках DM и AB как на диаметрах, то есть лежит в той же полуплоскости относительно прямой BC , что и вершина A . Тем самым, мы проверили все соотношения из условия, однозначно задающие точку P , то есть $P' = P$. Для завершения решения заметим, что поскольку при поворотной гомотетии с центром в точке P , переводящей AB в $A'C$, отрезок PB переходит в отрезок PC , то $\angle PBC = \angle(PC, PB) = \angle(A'C, AB)$. Поскольку $AB < AC$, то $\angle BCA' = \angle BCA < \angle CBA$, поэтому лучи AB и CA' пересекаются (обозначим точку пересечения через X). Отсюда следует, что $\angle BPC = 180^\circ - \angle BXC = 180^\circ - (\angle ABC - \angle ACB)$, что и требовалось доказать.

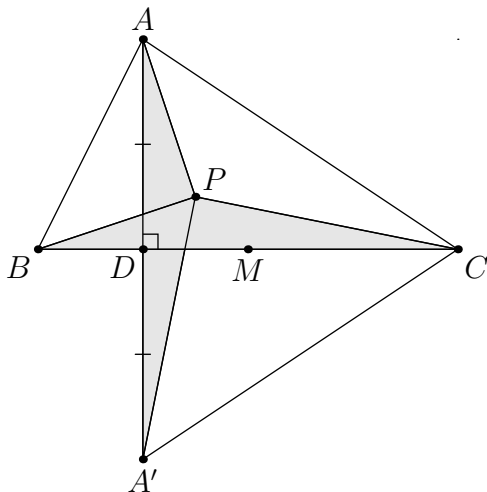


Рис. 2: к задаче 6

□