Нерациональный кузнечик

1. Дано положительное иррациональное число α, меньшее 1. Кузнечик прыгает по окружности длины 1. За каждую секунду он прыгает по часовой стрелке на дугу длины α.

(а) Докажите, что когда-нибудь он окажется на расстоянии меньше чем $1/1000$ от своего исходного положения (расстояние считается по окружности).

(б) Докажите, что кузнечик рано или поздно посетит любую наперёд выбранную дугу окружности. Верно ли, что он посетит любую наперёд заданную точку окружности?

(в) (Теорема Кронекера). Докажите, что если $\alpha > 0$ — иррациональное число, то произвольный интервал (a, b) числовой прямой содержит число вида $n\alpha - m$, где n, m - неотрицательные целые числа. (Иными словами, множество значений выражения $n\alpha - m$ всюду плотно на числовой прямой).

2. Кузнечик прошел курсы повышения квалификации и теперь он умеет делать два прыжка: с длинами $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$ в обе стороны. Теперь кузнечик готов прыгать по прямой. Докажите, что он сможет попасть в любой отрезок на прямой.

3. **(а)** В каждой точке координатной плоскости с целыми координатами сидит круглый дятел радиуса $r > 0$. У дятла в точке $(0, 0)$ есть ружьё. Докажите, что в каком бы направлении он не стрельнул, пуля попадёт в другого дятла.

(б) Дятел вошел во вкус и теперь стреляет каждую минуту в новом направлении. При выстреле дятлы на линии огня взлетают и покидают координатную плоскость. Докажите, что на каждом выстреле кто-то будет взлетать.

4. **(а)** Кузнечики прыгают по окружности, делая шаги $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ по часовой стрелке. Все кузнечики начинают в одной точке окружности. Докажите, что в какой-то момент они все окажутся на расстоянии $< 1/1000$ от стартовой точки.

(б) (Теорема Дирихле) Докажите, что для любых вещественных $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ и для любого натурального N существуют такие целые $m_1, \ldots, m_k$ и $0 < n < N^k$, что справедливы k неравенств

$$|n\alpha_1 - m_1| < \frac{1}{N}, \quad |n\alpha_2 - m_2| < \frac{1}{N}, \quad \ldots, \quad |n\alpha_k - m_k| < \frac{1}{N}.$$

5. На прямой конечное число отрезков суммарной длиной 2.41 покрашено чёрным, в одной из черных точек сидит кузнечик. Он умеет прыгать по прямой на 1 влево или на $\sqrt{2}$ вправо. Докажите, что он не сможет все время оставаться на черной части прямой.