

## Бесконечные множества

**Определение.** Отображение  $f: X \rightarrow Y$  называется *биекцией*, если для любого  $y \in Y$  существует единственный такой элемент  $x \in X$ , что  $f(x) = y$ . Множества  $X$  и  $Y$  называются *равномощными*, если существует биекция из  $X$  в  $Y$ . Множество называется *счётным*, если оно равномощно  $\mathbb{N}$ , и *континуальным*, если оно равномощно интервалу  $(0, 1)$ .

1. Докажите, что любые два интервала равномощны.
2. Докажите, что объединение конечного или счётного набора **(а)** непересекающихся; **(б)** произвольных счётных множеств счётно. **(в)** Докажите, что множества  $\mathbb{Z}$  и  $\mathbb{Q}$  счётны.
3. Докажите, что **(а)** в произвольном бесконечном множестве есть счётное подмножество; **(б)** если к бесконечному множеству добавить конечное или счётное, то получится множество, равномощное исходному.
4. Докажите, что множества  $[0, 1)$ ,  $[0, 1]$  и  $\mathbb{R}$  континуальны.
5. **(а)** Докажите, что множество всех конечных последовательностей цифр 0 и 1 счётно. **(б)** Докажите, что множество всех бесконечных последовательностей цифр 0 и 1 континуально. **(в)** Докажите, что континуальное множество не счётно.
6. Докажите, что квадрат и отрезок равномощны.
7. Обязательно ли следующие множества являются не более чем счётными: **(а)** множество непересекающихся кругов на плоскости? **(б)** множество непересекающихся окружностей на плоскости?
8. **Теорема Кантора.** Докажите, что никакое множество не равномощно множеству своих подмножеств.
9. **Теорема Кантора-Бернштейна.** Известно, что каждое из множеств  $A$  и  $B$  равномощно некоторому подмножеству второго. Докажите, что  $A$  и  $B$  равномощны.
10. Отрезок разбит на два множества. Докажите, что одно из них равномощно отрезку.
11. Пусть  $A$  — счётное множество,  $M$  — некоторое бесконечное множество подмножеств  $A$ . Известно, что для любых двух элементов  $M$  **(а)** один есть подмножество другого; **(б)** их пересечение конечно. Обязательно ли  $M$  счётно?
12. Бесконечно много школьников решали бесконечно много задач по теории множеств. При этом каждую задачу решило лишь конечное количество школьников, и среди любого бесконечного набора школьников найдутся двое решивших одну и ту же задачу. Докажите, что школьников-лентяев, решивших конечное количество задач, конечное количество.