

Комплексные координаты 2

Соображение 4. Чтобы удачно ввести комплексные координаты, важно наиболее оптимальным образом выбрать, какую окружность объявить единичной, как направить оси и относительно какого треугольника вычислять все координаты. Чаще всего единичной окружностью удобно объявить описанную или вписанную/внеписанную окружность какого-то треугольника (необязательно исходного).

1. Треугольник ABC вписан в единичную окружность Ω . Выразите координаты точки пересечения медиан, ортоцентра и центра окружности девяти точек треугольника ABC через координаты a, b, c его вершин.
2. Треугольник ABC вписан в единичную окружность Ω . Точки D, E, F — середины «малых» дуг AB, BC, AC соответственно.
 - (а) Докажите, что существуют такие числа $x, y, z \in \mathbb{C}$, что $a = x^2, b = y^2, c = z^2$, а также $d = -xy, e = -yz, f = -xz$.
 - (б) Выразите через переменные x, y, z координаты центра вписанной и центров внеписанных окружностей треугольника ABC .
3. Объявим вписанную окружность треугольника ABC единичной. Пусть она касается сторон AB, BC и CA в точках P, Q и R соответственно.
 - (а) Найдите координаты точек A, B и C (здесь и далее — в терминах p, q, r).
 - (б) Найдите координату такой точки S на вписанной окружности, что $\triangle PIS \sim \triangle BOC$.
 - (в) При помощи пункта б) найдите координату центра O описанной окружности треугольника ABC .
 - (г) Найдите координату центра E окружности девяти точек треугольника ABC .
Указание. В каком отношении M делит отрезок EO , где M — точка пересечения медиан треугольника ABC ?
 - (д) Найдите предполагаемую координату точки касания вписанной окружности и окружности девяти точек, как точку пересечения луча IE со вписанной окружностью.
 - (е) Докажите **теорему Фейербаха**: вписанная окружность касается окружности девяти точек.

Соображение 5. Как мы уже видели, в комплексных координатах удобно работать с направленными углами. В частности, $\angle(AB, CD) = \arg\left(\frac{b-a}{d-c}\right)$. Также можно удобным образом ввести направления. Пусть они отсчитываются против часовой стрелки от прямой ℓ_0 . Введём комплексные координаты так, что ℓ_0 будет вещественной осью. Тогда направлению прямой AB поставим в соответствие число $\frac{b-a}{b-\bar{a}}$. Обозначим это отображение $f: \overline{AB} \mapsto \frac{b-a}{b-\bar{a}}$.

4. Докажите, что $f(\overline{AB} + \overline{CD}) = f(\overline{AB}) \cdot f(\overline{CD})$.

Практика.

5. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Докажите, что ортоцентры треугольников ABC, ABD, ACD и BCD лежат на одной окружности.
6. Вписанная окружность остроугольного неравностороннего треугольника ABC касается его сторон BC и CA в точках Q и R соответственно. В треугольнике также проведены высоты BE и CF . Докажите, что центры вписанных окружностей треугольников ABC и AEF симметричны относительно прямой QR .
7. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ углы при вершинах A, B и C равны. Докажите, что прямая Эйлера треугольника ABC проходит через D .

Соображение 6*. Движение точки A по окружности можно задать параметрически: $z(t) = \lambda + (\cos t + i \sin t)\mu$, где $\lambda, \mu \in \mathbb{C}, t \in \mathbb{R}$. Исходя из этого, можно попробовать «запустить» какую-нибудь точку по единичной окружности (например, вершину треугольника по его описанной окружности), выразить координаты всех точек и посмотреть, какое уравнение от t нужно будет проверить. Оно будет иметь вид $P(z, \bar{z}) = 0$, где $P(x, y)$ — какой-то многочлен. Подставляя $\cos t + i \sin t = w, \cos t - i \sin t = \frac{1}{w}$ и домножая на знаменатели, получим, что, для того чтобы полученный многочлен $\tilde{P}(w)$ от одной (!) переменной был тождественно равен нулю (что эквивалентно исходной задаче), достаточно проверить утверждение задачи лишь для конечного числа различных по модулю 2π значений t , превышающего степень многочлена $\tilde{P}(w)$.

8. В треугольнике ABC отмечены центр описанной окружности O и ортоцентр H . Окружность (ABH) повторно пересекает AC в точке X , а окружность (ACH) повторно пересекает AB в точке Y . Докажите, что центр окружности (HXY) лежит на OH .
 - (а) Решите задачу при помощи направлений и соображения 4.
 - (б) «Запустите» вершину A по описанной окружности и решите задачу в стиле соображения 6.
9. Вписанная окружность треугольника ABC касается его сторон CA и AB в точках B_1 и C_1 соответственно. На прямых CA, AB, B_1C_1 отмечены точки B_2, C_2, M таким образом, что точки C, B, M — середины отрезков B_1B_2, C_1C_2, B_1C_1 соответственно. Прямые BB_1 и CC_1 пересекаются в точке J . Докажите, что $JM \perp B_2C_2$.