Графические последовательности

Список степеней вершин простого графа, упорядоченный по невозрастанию, будем называть его *степенной последовательностью.*

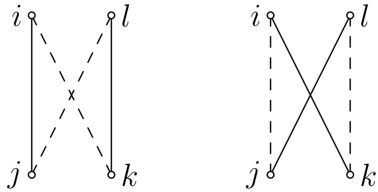
Последовательность $d_1 \geqslant d_2 \geqslant \ldots \geqslant d_n$ называется *графической*, если существует граф на n вершинах с такой последовательностью степеней вершин.

1. **(а)** Приведите пример двух разных графов с одинаковыми степенными последовательностями.

(б) Докажите, что существуют ровно 5 графов, у которых последовательность степеней вершин равна последовательности $2 \geqslant 2 \geqslant 2 \geqslant 2 \geqslant 1 \geqslant 1 \geqslant 1 \geqslant 1$.

2. Приведите пример последовательности с чётной суммой, не являющейся графической.

Пусть в графе есть вершины i, j, k, l такие, что пары (i, j) и (k, l) соединены ребром, но пары (i, k) и (j, l) не соединены ребром. Тогда *переключением* назовём операцию, при которой мы убираем рёбра в парах (i, j) и (k, l) и соединяем рёбрами (i, k) и (j, l).



Теорема. Любые два графа с одинаковыми степенными последовательностями приводятся один к другому с помощью последовательности переключений.

3. Пусть вершины графа занумерованы числами $1, 2, \ldots n$ так, что $d_1 \geqslant d_2 \geqslant \ldots \geqslant d_n$. Докажите, что для каждой вершины i существует такая последовательность переключений, что вершина i соединена с d_i вершинами наибольшей степени.

4. Докажите теорему.

Пусть $d = \{d_1 \geqslant d_2 \geqslant \ldots \geqslant d_n\}$ — последовательность. Обозначим через d^i последовательность, полученную вычёркиванием i-ого члена и уменьшением первых d_i членов на 1.

5. **(теорема Хавела-Хакими)** Докажите, что

(а) если для некоторого i последовательность d^i является графической, то и d — графическая последовательность;

(б) если последовательность d графическая, то каждая последовательность d^i является графической.

6. **(теорема Эрдёша-Галлаи)** Последовательность $d_1 \geqslant d_2 \geqslant \ldots \geqslant d_n$ является графической тогда и только тогда, когда

1. $d_1 + d_2 + \ldots + d_n$ — чётное;
2. Для каждого $1 \leqslant k \leqslant n-1$ верно неравенство $\sum_{i=1}^{k} d_i \leqslant k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} \min\{k, d_i\}$