Комплексные координаты

Введём на плоскости декартову систему координат Oxy. Точке с координатами (x, y) сопоставим комплексное число $z = x+iy$ — её *комплексную координату*. Таким образом, $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$; Ox — *вещественная ось*, Oy — *мнимая ось*.

Соображение 1. Умножение на комплексное число $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ задаёт на комплексной плоскости поворотную гомотетию, а именно композицию поворота вокруг начала координат на угол φ против часовой стрелки и гомотетии с центром в начале координат и коэффициентом r.

1. **(а)** Умножение на какое комплексное число задаёт поворот на 90° против часовой стрелки; поворот на 120° по часовой стрелке вокруг начала координат?
(б) Задайте формулой поворотную гомотетию, переводящую a в b, с центром в точке $z = 0$; в произвольной точке z.

2. Передокажите свойство двойственности поворотной гомотетии: если существует поворотная гомотетия с центром в точке O, переводящая отрезок AB в $A'B'$, то существует поворотная гомотетия с тем же центром, переводящая отрезок AA' в BB'.

3. **(а)** Докажите, что если треугольники ABC и DEF подобны (в указанном порядке) и одинаково ориентированы, то для комплексных координат их вершин справедливо равенство
$$\frac{c-a}{b-a} = \frac{f-d}{e-d}.$$
Как изменится равенство, если они ориентированы противоположно?
(б) На отрезке MN построены подобные, одинаково ориентированные треугольники AMN, NBM и MNC. Докажите, что треугольник ABC подобен всем этим треугольникам.

4. Квадраты $ABCD$ и $AB_1C_1D_1$ расположены так, что B — середина C_1D_1, а точка D_1 лежит внутри квадрата $ABCD$. Докажите, что $CC_1 = AC$.

Соображение 2. Аргумент отношения двух комплексных чисел равен разности их аргументов. При этом

$$\operatorname{Arg} z = \pi k,\ k \in \mathbb{Z} \iff z \in \mathbb{R} \iff \overline{z} = z, \quad \operatorname{Arg} z = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z} \iff z \in i\mathbb{R} \iff \overline{z} = -z.$$

При помощи этих соображений можно выражать равенства углов и перпендикулярность отрезков.

5. Докажите, что следующие уравнения задают прямую на комплексной плоскости:

(а) $\dfrac{z-z_1}{z_2-z_1} = \dfrac{\overline{z}-\overline{z_1}}{\overline{z_2}-\overline{z_1}}$; **(б)** $a\overline{z} + \overline{a}z + \lambda = 0$, $a \in \mathbb{C}, \lambda \in \mathbb{R}$.

Соображение 3. Рассмотрим окружность Ω радиуса 1 с центром в начале координат (т. н. *единичную окружность*). Её уравнение: $|z| = 1 \iff z\overline{z} = 1$. Часто бывает удобно ввести комплексные координаты так, чтобы некоторая «хорошая» окружность из условия стала единичной, поскольку для точек, лежащих на ней, сопряжённые координаты легко выражаются через исходные.

6. Проверьте (при необходимости, выведите) следующие формулы:
(а) Уравнение прямой AB для $A, B \in \Omega$: $z + ab\overline{z} = a + b$;
(б) Уравнение касательной в точке A к Ω;
(в) Координата точки C пересечения касательных к Ω в точках A и B: $c = \frac{2ab}{a+b}$.
(г) Координата ортогональной проекции Y точки X на прямую AB для $A, B \in \Omega$: $y = \frac{1}{2}(a + b + x - ab\overline{x})$.

7. Точки M и N — середины сторон AB и CD вписанного четырёхугольника $ABCD$ соответственно. Пусть E — ортогональная проекция C на AB, а F симметрична N относительно середины DE. Пусть F оказалась внутри $ABCD$. Докажите, что $\angle BMF = \angle CBD$.

8. (*Теорема Ньютона*) Докажите, что центр вписанной в четырёхугольник окружности лежит на прямой, соединяющей середины диагоналей этого четырёхугольника.

9. Окружность ω с центром в I, вписанная в треугольник ABC, касается сторон CA и AB в точках E и F соответственно. Точки G и H симметричны E и F относительно I. Пусть Q — точка пересечения прямых GH и BC, а M — середина стороны BC. Докажите, что $IQ \perp IM$.

10. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром в точке O, E — точка пересечения диагоналей AC и BD. Окружность ω_{ad} проходит через точки A, D и E, а окружность ω_{bc} — через точки B, C и E. Пусть P — точка пересечения касательной к ω_{ad} в точке A с касательной к ω_{bc} в точке C, а Q — точка пересечения касательной к ω_{ad} в точке D с касательной к ω_{bc} в точке B. Докажите, что $OP = OQ$.