

Я знаю, что ты знаешь, что я знаю

1. Четыре логика А, В, С и D сидят за круглым столом в этом порядке (если двигаться по часовой стрелке). Им показали девять карт одной масти (шестёрка, семёрка, . . . , король, туз), а потом перемешали и выдали по карте, так что каждый видит лишь свою карту. Логикам по очереди задали один и тот же вопрос: «Ваша карта старше, чем у вашего соседа справа?». После этого А, В, С и D по очереди сказали «не знаю». Какая карта у D?
2. Петя и Вася загадали по натуральному числу и сказали их Коле. Коля написал на одном листе бумаги сумму загаданных чисел, а на другом их произведение. После этого он один из листов съел, а другой — на нём оказалось написано число 1000 — показал Пете и Васе. Увидев это число, Петя сказал, что не знает, какое число загадал Вася. Услышав это, Вася сказал, что не знает, какое число загадал Петя. Какое число загадал Вася?
3. Лев — очень мудрое животное, которое всегда действует рационально. На волшебный остров поселили n львов и одну козу. Львы могут питаться растущими на острове плодами, но коза для льва вкуснее. Однако остров волшебный, и съевший козу лев сам мгновенно превращается в козу. Ни один из львов не хочет быть съеденным (после того, как станет козой) другим львом, и другие львы об этом знают. При каких n коза будет съедена?
4. Мудрецам А, В, С, D сообщили, что числа $1, 2, \dots, 12$ написаны по одному на 12 карточках и что эти карточки будут розданы им по три, причём каждый увидит лишь свои карточки. После раздачи мудрецы по очереди сказали следующее.

А: «На одной из моих карточек — число 8».

В: «Все числа на моих карточках простые».

С: «А все числа на моих — составные, причём имеют общий простой делитель».

Д: «Тогда я знаю, какие карточки у каждого из вас».

Какие карточки у А, если все сказали правду?

5. Учитель нарисовал в своей тетрадке треугольник с целочисленными сторонами и сказал об этом трём ученикам математического класса. Кроме того, каждому из них он сообщил длину одной из сторон треугольника (разным ученикам — длины разных сторон). После этого между учениками состоялся следующий разговор.

Первый: «Я знаю, это этот треугольник непрямоугольный».

Второй: «Если бы я знал, что он неравносторонний, то знал бы все его стороны».

Третий: «Треугольник действительно неравносторонний».

Чему равны стороны нарисованного учителем треугольника?

6. Вам и шести вашим друзьям-математикам надели на голову по колпаку. Каждый из вас видит колпаки всех остальных друзей, но не видит свой. Вам всем сообщили, что всего было по три красных, жёлтых и зелёных колпака, но два из них спрятали. Ваши друзья стали по очереди произносить следующие фразы.

Первый: «Я не знаю, какого цвета на мне колпак».

Второй: «Я тоже не знаю, какого цвета на мне колпак».

Третий: «И я не знаю, какого цвета на мне колпак».

Четвёртый: «Я знаю, что на мне красный колпак».

Пятый: «А я так и не знаю, какого цвета на мне колпак».

Шестой: «А на мне точно жёлтый колпак».

Можете ли вы определить, какой колпак у вас на голове?

7. На лбах у m мудрецов, сидящих по кругу, написали натуральные числа. Султан, увидев эти числа, выписал на доске n чисел и объявил, что сумма всех чисел на лбах мудрецов выписана на доске. Далее султан идёт по кругу и спрашивает: «Можешь ли ты, видя числа на доске и зная предыдущие ответы мудрецов, определить своё число?». Если в какой-то момент мудрец ответит «Да» и верно назовёт число, то всех отпустят.

(а) Докажите, что если $m \geq n$, то мудрецов заведомо отпустят.

(б) Докажите, что если $m < n$, то султан может так написать числа на лбах и доске так, чтобы не отпустить мудрецов.