

## Взгляд издалека

Весь мир на ладони! Ты  
счастлив и нем  
И только немного завидуешь  
тем,  
Другим, у которых вершина  
ещё впереди

---

«Вершина», В. Высоцкий

1. Существуют ли положительные числа  $x, y, z$  и  $t$ , удовлетворяющие равенствам

$$x^{20} + y^{20} + z^{20} = t^{20}, \quad \frac{1}{x^{20}} + \frac{1}{y^{20}} + \frac{1}{z^{20}} = \frac{1}{t^{20}}?$$

2. При каких целых значениях  $m$  число

$$N = 1 + 2m + 3m^2 + 4m^3 + 5m^4 + 4m^5 + 3m^6 + 2m^7 + m^8$$

является квадратом целого числа?

3. (а) Ваня нашёл произведение цифр для каждого семизначного числа, а затем подсчитал сумму всех полученных произведений. Сколько получилось в итоге?  
(б) Чему равна сумма всевозможных произведений чётного количества дробей

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{100}?$$

(В каждом произведении все дроби различны.)

4. Множество из 100 подряд идущих натуральных чисел назовём *прекрасным*, если его можно разбить на два подмножества с равными произведениями. Конечно ли число прекрасных множеств?  
5. Вещественные числа  $x, y, z, a, b, c$  таковы, что

$$a = x + y - z,$$

$$b = -x + y + z,$$

$$c = x - y + z,$$

$$\frac{(a+b+c)^5 - a^5 - b^5 - c^5}{(a+b)(b+c)(c+a)} = \frac{(x+y+z)^5 - x^5 - y^5 - z^5}{(x+y)(y+z)(z+x)}.$$

Докажите, что  $x = y = z = a = b = c$ .

6. Докажите, что при любых натуральных  $m$  и  $n$  ( $n > m$ ) число  $\sum_{k=m}^n \frac{1}{3k+1}$  не является целым.