

Взгляд издалека

Весь мир на ладони! Ты
счастлив и нем
И только немного завидуешь
тем,
Другим, у которых вершина
ещё впереди

«Вершина», В. Высоцкий

1. При каких целых значениях m число

$$N = 1 + 2m + 3m^2 + 4m^3 + 5m^4 + 4m^5 + 3m^6 + 2m^7 + m^8$$

является квадратом целого числа?

2. (а) Ваня нашёл произведение цифр для каждого семизначного числа, а затем подсчитал сумму всех полученных произведений. Сколько получилось в итоге?
(б) Чему равна сумма всевозможных произведений чётного количества дробей

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{100}?$$

(В каждом произведении все дроби различны.)

3. Множество из 100 подряд идущих натуральных чисел назовём *прекрасным*, если его можно разбить на два подмножества с равными произведениями. Конечно ли число прекрасных множеств?
4. На каждой из 2^m карточек записано по единице. За один ход можно взять две карточки с числами a и b , стереть их и записать на обеих карточках по числу $a + b$. Докажите, что через $m2^{m-1}$ ходов сумма чисел на всех карточках будет меньше 4^m .
5. Вещественные числа x, y, z, a, b, c таковы, что

$$a = x + y - z,$$

$$b = -x + y + z,$$

$$c = x - y + z,$$

$$\frac{(a + b + c)^5 - a^5 - b^5 - c^5}{(a + b)(b + c)(c + a)} = \frac{(x + y + z)^5 - x^5 - y^5 - z^5}{(x + y)(y + z)(z + x)}.$$

Докажите, что $x = y = z = a = b = c$.

6. Докажите, что при любых натуральных m и n ($n > m$) число $\sum_{k=m}^n \frac{1}{3k+1}$ не является целым.