

Геометрический разнобой

Неравенства

Ключевые идеи: проинтерпретировать части неравенства геометрически (возможно, после алгебраических преобразований); подразбить отрезки из условия на более понятные или, наоборот, собрать из них треугольник или ломаную; «отрезок не меньше своей ортогональной проекции»; воспользоваться промежуточной оценкой.

1. В треугольнике ABC проведена медиана BM . Точка D на продолжении луча AC за C такова, что $BD = 2CD$. Окружность (BMC) повторно пересекает отрезок BD в точке N . Докажите, что $AC + BM > 2MN$.
2. Во вписанном четырёхугольнике $ABCD$ выполнено равенство $\angle A = 3\angle B$. На сторонах AB и BC выбираются точки C_1 и A_1 соответственно так, что $AA_1 = AC = CC_1$. Докажите, что $3A_1C_1 > BD$.

Комбинаторная геометрия

Ключевые идеи: комбинаторные (принцип крайнего, индукция, раскраски, запуск процессов, вспомогательные графы ...) и геометрические (симметрия, неравенство треугольника ...).

3. На каждой стороне выпуклого многоугольника построили треугольник, третья вершина которого — пересечение биссектрис двух углов многоугольника, примыкающих к этой стороне. Докажите, что вместе эти треугольники покрывают весь многоугольник.
4. На доске нарисован выпуклый 1000-угольник. Миша хочет отметить в нём 500 точек и соединить каждую из них ломаными хотя бы с четырьмя вершинами. Все эти ломаные должны не пересекать друг друга и сторон 1000-угольника (но могут иметь общие концы). Удастся ли ему это сделать?

Фиксированные объекты

Ключевые идеи: посмотреть «крайние»/хорошие частные случаи переменной величины и попробовать угадать/явно построить искомый фиксированный объект; если не получается — поискать на картинке хоть что-то фиксированное (например, угол); попробовать описать фиксированный объект в терминах какого-то хорошего преобразования (например, «получается инверсией/симметрией/поворотом/... из...»).

5. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. По дуге AD , не содержащей точек B и C , движется точка P . Фиксированная прямая ℓ , перпендикулярная прямой BC , пересекает лучи BP , CP в точках B_0 , C_0 соответственно. Докажите, что касательная, проведенная к описанной окружности треугольника PB_0C_0 в точке P , проходит через фиксированную точку.
6. Дан остроугольный треугольник ABC . На отрезке AC и на продолжении стороны BC за точку C выбираются переменные точки X и Y соответственно таким образом, что $\angle ABX + \angle CXY = 90^\circ$. Точка T — проекция точки B на прямую XY . Докажите, что все такие точки T лежат на одной прямой.

Вопросы других типов

Полезные соображения: попробуйте вспомнить основные факты, простые утверждения о тех объектах, которые возникли в условии задачи; проанализируйте задачу с конца; задумайтесь о том, как вообще можно доказать тот или иной факт (можно явно выписать список идей и последовательно протестировать их на конкретной задаче), какие ассоциации вызывает у вас конкретная картинка (**бывает полезно** нарисовать отдельно какие-то её части или перерисовать её с точки зрения другого треугольника).

7. Пусть P — произвольная точка на диагонали BD прямоугольника $ABCD$, F — проекция точки P на сторону BC . Точка H взята на отрезке BC так, что $BF = FH$. Отрезки PC и AH пересекаются в точке Q . Докажите, что площади треугольников APQ и CHQ равны.
8. Точка I — центр окружности, вписанной в четырёхугольник $ABCD$. Докажите, что на луче CI найдётся такая точка K , что $\angle KBI = \angle KDI = \angle BAI$.
9. На сторонах выпуклого четырёхугольника $ABCD$ во внутреннюю сторону построены правильные треугольники. Оказалось, что треугольники, построенные на AB и CD , имеют общую вершину M . Докажите, что два других построенных правильных треугольника имеют общий центр.
10. Дана трапеция $ABCD$ в которой $BC \parallel AD$. Точки B' и C' симметричны B и C относительно прямых CD и AB соответственно. Докажите, что середина отрезка, соединяющего центры описанных окружностей треугольников ABC' и $B'CD$, равноудалена от A и D .

Посчитаем напоследок

Ключевые утверждения: леммы об отношении синусов и о луче, метод площадей (например, «чевиана — ГМТ точек с фиксированным отношением площадей»), подобные треугольники, счёт отрезков (т. Фалеса, основное свойство биссектрисы и т.п.; т. Чевы и Менелая, принцип Карно, векторы).

11. Пусть B_1 и B_2 — точки стороны AC треугольника ABC , симметричные относительно середины этой стороны. Окружность ω_a проходит через A , B_1 и касается стороны AB . Аналогично окружность ω_c проходит через C , B_1 и касается BC . Обозначим через B' вторую точку пересечения окружностей ω_a и ω_c . Докажите, что $\angle ABB' = \angle CBB_2$.
12. Точка M — середина стороны AC остроугольного треугольника ABC . На меньшей дуге AC описанной окружности этого треугольника выбрана точка K таким образом, что угол AKM — прямой. Отрезки BK и AM пересекаются в точке X , а высота, проведенная из вершины A , пересекает отрезок BM в точке Y . Докажите, что прямые XY и AB параллельны.
13. В остроугольном треугольнике ABC точка I_c — центр вневписанной окружности, касающейся стороны AB ; A_1 и B_1 — точки касания двух других вневписанных окружностей со сторонами BC и CA соответственно; C' — точка на описанной окружности, диаметрально противоположная точке C . Докажите, что прямые I_cC' и A_1B_1 перпендикулярны.