Графы

1. В стране некоторые пары городов соединены односторонними прямыми авиарейсами (между любыми двумя городами есть не более одного рейса). Скажем, что город A доступен для города B, если из B можно долететь в A, возможно, с пересадками. Известно, что для любых двух городов P и Q существует город R, для которого и P, и Q доступны. Докажите, что существует город, для которого доступны все города страны. (Считается, что из города можно долететь до него самого.)

2. В дереве все вершины были занумерованы числами от 1 до n. Нумерацию поменяли, но оказалось, что если вершины i и j смежны, то они и раньше были смежны. Докажите, что найдётся либо вершина номер которой не изменился, либо ребро, у которого набор номеров концов остался таким же.

3. В графе G степень каждой вершины не превосходит 2022. Докажите, что ребра графа можно покрасить в 11 цветов так, что графы, образованные ребрами каждого цвета, двудольные.

4. Среди 100 болельщиков некоторые (возможно, все или никто) болеют за «Спартак», а остальные — за «Динамо». Разрешается спросить у любых двоих, болеют ли они за разные команды, и они честно ответят «да» или «нет». Требуется посадить болельщиков в два автобуса так, чтобы в каждом были болельщики только одной команды. За какое наименьшее количество вопросов это наверняка можно сделать?

5. В стране $n > 2$ городов, некоторые из которых соединены беспосадочными авиалиниями (действующими в обоих направлениях). Ни один город не соединён прямыми авиарейсами со всеми остальными. Оказалось, что для любых двух городов существует единственный способ добраться из одного в другой, сделав не более одной пересадки. Докажите, что $n - 1$ — точный квадрат.

6. В лагерь приехали 10000 детей, каждый дружит ровно с 11 другими детьми в лагере (дружба взаимна). Каждый ребенок носит футболку одного из семи цветов радуги, причем у любых двух друзей цвета различны. Вожатые потребовали, чтобы какие-нибудь дети (хотя бы один) надели футболки других цветов (из тех же семи). Опрос показал, что 100 детей менять цвет не намерены. Докажите, что некоторые из остальных детей все же могут изменить цвета своих футболок так, чтобы по-прежнему у любых двух друзей цвета были различны

7. В стране 998 городов. Некоторые пары городов соединены двусторонними авиарейсами. Согласно закону, между любой парой городов должно быть не больше одного рейса. Другой закон требует, чтобы для любой группы городов было не больше 5k + 10 рейсов, соединяющих два города этой группы, где k — количество городов в группе. В настоящий момент законы соблюдены. Докажите, что министерство развития может ввести несколько новых рейсов так, чтобы законы по-прежнему соблюдались, а общее количество рейсов в стране стало равным 5 000.

8. В государстве n городов, и между каждыми двумя из них курсирует экспресс (в обе стороны). Для любого экспресса цены билетов «туда» и «обратно» равны, а для любых разных экспрессов эти цены различны. Докажите, что путешественник можетвыбрать начальный город, выехать из него и проехать последовательно на n 1 экспрессах, платя за проезд на каждом следующем меньше, чем за проезд на предыдущем. (Путешественник может попадать несколько раз в один и тот же город.)