

Теория чисел

1. Артемий выбрал 2026 натуральных чисел, меньших 2025!. Для любых двух выбранных чисел Артемий записал в тетрадку неполное частное, которое получается, если большее из этих двух чисел поделить на меньшее с остатком. Докажите, что среди чисел в тетрадке найдутся два равных.
2. Про вещественные числа x и y известно, что оба числа $x + y$ и $x^2 + y^2$ целые. Обязательно ли число $x^3 + y^3$ также целое?
3. На доске написаны числа $1, 2, \dots, 1000$. Петя и Вася играют в игру. Они по очереди стирают написанные числа. Начинает Петя. Тот из мальчиков, после хода которого все оставшиеся числа (быть может, одно) будут иметь натуральный общий делитель, больший единицы, проигрывает. Если же на доске останется только единица, то игра считается завершившейся вничью. Каков будет результат при правильной игре обоих соперников?
4. Назовём натуральное число n *хорошим*, если некоторые его делители, среди которых обязательно есть 1, в сумме дают n . Докажите, что для любого натурального n существует хорошее число, делящееся на n .
5. Натуральные числа a и b больше 1. Известно, что числа $a^2 + b$ и $a + b^2$ простые. Докажите, что числа $ab + 1$ и $a + b$ взаимно простые.
6. Саша выбрал натуральное число $N > 1$ и выписал в строчку в порядке возрастания все его натуральные делители: $d_1 < \dots < d_s$ (так что $d_1 = 1$ и $d_s = N$). Затем для каждой пары стоящих рядом чисел он вычислил их наибольший общий делитель; сумма полученных $s - 1$ чисел оказалась равной $N - 2$. Какие значения могло принимать N ?
7. Докажите, что для любого нечётного числа $d > 1$ и любого натурального m среди членов последовательности

$$a_n = 2^{2^n} + d$$

найдутся два, НОД которых больше m .