Окружности

1. Пусть L — середина «меньшей» дуги AC описанной окружности треугольника ABC. Из вершины B на касательную к описанной окружности, проведённую в точке L, опустили перпендикуляр BP. Докажите, что точки P, L и середины сторон AB и BC лежат на одной окружности.

2. Докажите, что точки пересечения биссектрис противоположных углов трапеции вместе с концами любого из её оснований лежат на одной окружности.

3. Прямые, касающиеся окружности ω в точках A и B, пересекаются в точке O. Точка I — центр ω. На меньшей дуге AB окружности ω выбрана точка C, отличная от середины дуги. Прямые AC и OB пересекаются в точке D, а прямые BC и OA в точке E. Докажите, что центры описанных окружностей треугольников ACE, BCD и OCI лежат на одной прямой.

4. На медиане CD треугольника ABC отмечена точка E. Окружность ω_1, проходящая через точку E и касающаяся прямой AB в точке A, пересекает сторону AC в точке M. Окружность ω_2, проходящая через точку E и касающаяся прямой AB в точке B, пересекает сторону BC в точке N. Докажите, что описанная окружность треугольника CMN касается окружностей ω_1 и ω_2.

5. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC выбрана точка R, на катете BC — точка T, а на отрезке AT — точка S так, что $\angle ART = \angle ASC = 90°$. Точки M и N — середины отрезков BC и CR соответственно. Докажите, что точки M, T, S и N лежат на одной окружности.

6. В остроугольном треугольнике ABC провели высоты AA_1, BB_1, CC_1. На отрезках AA_1, BB_1, CC_1 отметили соответственно точки A', B', C' так, что $\angle BA'C = \angle AC'B = \angle CB'A = 90°$. Отрезки AC' и CA' пересекаются в точке B'', отрезки CB' и BC' — в точке A'', отрезки BA' и AB' — в точке C''. Докажите, что в шестиугольник $A'B''C'A''B'C''$ можно вписать окружность.