

Квадратный трёхчлен

1. Приведённый квадратный трёхчлен $P(x)$ таков, что многочлены $P(x)$ и $P(P(P(x)))$ имеют общий корень. Докажите, что $P(0) \cdot P(1) = 0$.
2. Даны различные действительные числа a, b, c . Докажите, что хотя бы два из уравнений $(x - a)(x - b) = x - c$, $(x - b)(x - c) = x - a$, $(x - c)(x - a) = x - b$ имеют решение.
3. Даны два приведённых квадратных трёхчлена $f(x)$ и $g(x)$; известно, что трёхчлены $f(x), g(x)$ и $f(x) + g(x)$ имеют по два корня. Оказалось, что разность корней трёхчлена $f(x)$ равна разности корней трёхчлена $g(x)$. Докажите, что разность корней трёхчлена $f(x) + g(x)$ не больше этих разностей. (В каждой разности из большего корня вычитается меньший.)
4. Верно ли, что для любых трёх различных натуральных чисел a, b и c найдётся квадратный трёхчлен с целыми коэффициентами и положительным старшим коэффициентом, принимающий в некоторых целых точках значения a^3, b^3 и c^3 ?
5. Дано квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ с целыми ненулевыми коэффициентами a, b и c , имеющее целый корень. Может ли оказаться, что, какой бы из этих трёх коэффициентов ни увеличить на 1, снова получится квадратное уравнение, имеющее целый корень?
6. Графики двух квадратных трёхчленов пересекаются в точках A и B . Через вершину O первого из них проведены прямые OA и OB , которые пересекают второй график в точках C и D . Докажите, что прямая CD параллельна оси абсцисс.
7. У Пети и Коли в тетрадах записаны по два числа; изначально — это числа 1 и 2 у Пети, 3 и 4 — у Коли. Раз в минуту Петя составляет квадратный трёхчлен $f(x)$, корнями которого являются записанные в его тетради два числа, а Коля — квадратный трёхчлен $g(x)$, корнями которого являются записанные в его тетради два числа. Если уравнение $f(x) = g(x)$ имеет два различных корня, то один из мальчиков заменяет свою пару чисел на эти корни, иначе ничего не происходит. Какое второе число могло оказаться у Пети в тетради в тот момент, когда первое стало равным 5?
8. Для какого наименьшего натурального числа a существуют целые числа b и c такие, что квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$ имеет два различных положительных корня, не превосходящих $\frac{1}{1000}$?