

Клетчатый разнобой

1. Какое максимальное число печенек можно разложить по клеткам таблицы 12×12 со следующими условиями:
 - в каждой клетке должно лежать не более одной печеньки;
 - количество печенек в каждой строке, столбце или диагонали должно быть чётным?

(Каждая диагональ параллельна одной из главных диагоналей и состоит из 1, 2, ..., 11 или 12 клеток).
2. В квадрате 2021×2021 закрасили главную диагональ, а также все клетки под ней. Сколько существует способов разрезать по линиям сетки закрашенную часть квадрата на 2021 различных прямоугольников?
3. Из клетчатого квадрата 55×55 вырезали по границам клеток 400 трёхклеточных уголков (повёрнутых как угодно) и ещё (а) 550 клеток; (б) 500 клеток. Докажите, что какие-то две вырезанные фигуры имеют общий отрезок границы.
4. В клетчатой таблице $n \times n$ ($n > 4$) поставлены n знаков $+$ в клетках одной диагонали и знаки $-$ во всех остальных клетках. Разрешается в некоторой строке или в некотором столбце поменять все знаки на противоположные. Докажите, что после любого количества таких операций в таблице останется не менее n плюсов.
5. Дано натуральное число k . На клетчатой плоскости изначально отмечено N клеток. Назовём крестом клетки A множество всех клеток, находящихся в одной вертикали или горизонтали с A . Если в кресте, неотмеченной клетки A отмечено хотя бы k других клеток, то клетку A также можно отметить. Оказалось, что цепочкой таких действий можно отметить любую клетку плоскости. При каком наименьшем N это могло случиться?
6. Восемь клеток одной диагонали шахматной доски назовем забором. Ладья ходит по доске, не наступая на одну и ту же клетку дважды и не наступая на клетки забора (промежуточные клетки не считаются посещёнными). Какое наибольшее число прыжков через забор может совершить ладья?
7. В некоторых клетках доски 100×100 стоит фишка. Назовём клетку *красивой*, если в соседних с ней по стороне клетках стоит чётное число фишек. Может ли ровно одна клетка доски быть красивой?