

Разнойой

1. Бизнесмен заключил с банкиром сделку: каждый день он кладёт в банк одну монету и в обмен получает любой набор монет по своему выбору, но все эти монеты меньшего достоинства (видов монет — конечное число). Менять (или получать) деньги в другом месте бизнесмен не может. Когда монет больше не останется, бизнесмен проигрывает. Докажите, что рано или поздно банкир выиграет, каков бы ни был начальный набор монет у бизнесмена.
2. В табличке $m \times n$ расставлены рациональные числа. Известно, что среди модулей расставленных чисел по крайней мере $m + n$ различных простых чисел. Докажите, что в табличке найдутся по крайней мере два непропорциональных столбца.
3. В стране несколько городов, некоторые соединены односторонней дорогой. Докажите, что можно объявить некоторые города «транспортными узлами» так, чтобы при этом до любого другого города из какого-нибудь транспортного узла можно было бы доехать максимум с одной пересадкой, а между транспортными узлами дорог не было.