Точка Болтая

Точкой Болтая треугольника ABC со стороны вершины A (или A-*Болтаем*) назовём такую точку Б (Б$_a$), что

$$\angle BA\text{Б} = \angle AC\text{Б} \quad \text{и} \quad \angle CA\text{Б} = \angle AB\text{Б}.$$

Как обычно, если не сказано иное, в треугольнике ABC

- O — центр описанной окружности;
- H — ортоцентр;
- L — точка пересечения симедиан.

1. **(а)** Докажите, что Б лежит на окружности (BOC).
(б) Докажите, что Б — это проекция O на симедиану.
(в) Докажите, что Б и Ш изогонально сопряжены.

2. В треугольнике ABC провели высоту AH и отметили точку M — середину стороны AB. Докажите, что описанная окружность треугольника BMH проходит через точку A-Болтая.

3. Касательная к описанной окружности треугольника ABC, проведённая в точке A, пересекает прямую BC в точке D. Точка O — центр описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что прямая OD проходит через A-Болтая.

4. В треугольнике ABC провели высоту AD и отметили середины M и N отрезков AB и AC. Докажите, что прямая, проходящая через D и A-Болтая, делит отрезок MN пополам.

5. На сторонах AB и AC остроугольного треугольника ABC вовне построены квадраты $ABDE$ и $ACFG$. Прямая AG пересекает отрезок BD в точке X, прямая AE пересекает отрезок CF в точке Y. Докажите, что окружности (DGX) и (FEY) пересекаются в A-Болтае.

6. Точки D, E и F на сторонах BC, CA и AB треугольника ABC соответственно таковы, что

$$\frac{BD}{DC} = \frac{CE}{EA} = \frac{AF}{FB}.$$

Пусть M — точка пересечения окружностей (BFD) и (CDE), отличная от D. Докажите, что $\angle LMO = 90^\circ$.

7. В параллелограмме $ABCD$ опустили перпендикуляры AX и AY из A на BC и CD соответственно. Из середин M и N отрезков AX и AY соответственно провели перпендикуляры ℓ_1 и ℓ_2 к XY. Пусть

$$\ell_1 \cap AB = L,\ \ell_1 \cap BC = K,\ \ell_2 \cap CD = Q,\ \ell_2 \cap DA = P.$$

Докажите, что окружности (LBK) и (PQD) касаются.