Замены в алгебре и неравенствах

1. Многочлен $P(t)$ и вещественное число a такое что $P(x) = P(y)$ для всяких x, y, в сумме дающих a. Докажите, что $P(t)$ можно представить в виде многочлена от $(t - a/2)^2$.

2. Найдите максимальное возможное значение выражения $x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}$.

3. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_{100} > 0$ — вещественные числа такие, что

$$a_{k+1} = \frac{(k+1)a_k}{a_k - k}, \quad k > 0.$$

Известно, что $a_{20} = a_{23}$. Найдите a_{100}.

4. Найдите все функции $f(x) \geqslant 0$ такие, что для всех вещественных x, y верно равенство $f(x+y) = f(x)f(y)f(xy)$.

5. Докажите, что из трёх положительных чисел всегда можно выбрать такие два числа x, y, что $0 \leqslant \frac{x-y}{1+xy} \leqslant 1$.

6. Пусть x, y, z — положительные вещественные числа такие, что $xyz = 1$. Докажите, что

$$\frac{1}{yz+z} + \frac{1}{zx+x} + \frac{1}{xy+y} \geqslant \frac{3}{2}.$$

7. Для всех вещественных $a, b, c > 0$ докажите, что

$$\frac{1}{3}\left(\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b}\right) \geqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}.$$

8. Пусть a, b, c — положительные вещественные числа такие, что $ab + bc + ca = abc$. Докажите, что

$$\frac{a^4+b^4}{ab(a^3+b^3)} + \frac{b^4+c^4}{bc(b^3+c^3)} + \frac{c^4+a^4}{ca(c^3+a^3)} \geqslant 1.$$

9. Докажите, что для всяких вещественных $\alpha, a, b, c > 0$ выполняется

$$a^\alpha(a-b)(a-c) + b^\alpha(b-c)(b-a) + c^\alpha(c-a)(c-b) \geqslant 0.$$