Основная теорема алгебры

Основная теорема алгебры. Всякий многочлен с комплексными коэффициентами, отличный от константы, имеет по крайней мере один комплексный корень.

Следствие. У любого многочлена n-й степени с комплексными коэффициентами ($n \neq 0$) ровно n комплексных корней (с учётом кратности).

1. Пусть $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ – многочлен с действительными коэффициентами.

(а) Докажите, что если $P(z) = 0$, то и $P(\bar{z}) = 0$.

(б) Докажите, что $P(x)$ представляется в виде произведения многочленов с действительными коэффициентами, каждый из которых имеет степень не выше двух.

2. Пусть $P(x)$ — многочлен с действительными коэффициентами, такой что для любого вещественного x выполняется $P(x) \geqslant 0$. Докажите, что найдутся многочлены $A(x)$ и $B(x)$ с действительными коэффициентами такие, что $P(x) = A(x)^2 + B(x)^2$.

3. Дан многочлен $f(x)$ с рациональными коэффициентами такой, что $f(\sqrt{2}) = 0$. Докажите, что $f(x)$ делится на $x^2 - 2$.

4. Натуральные числа m и n таковы, что $x^{2m} + x^m + 1$ делится на $x^{2n} - x^n + 1$. Докажите, что $x^{2m} + x^m + 1$ делится на $x^{2n} + x^n + 1$.

5. **(а)** Разложите на множители с действительными коэффициентами (все они должны быть не выше второй степени) многочлен $x^{2n} - 1$.

(б) Докажите, что $\sin\frac{\pi}{2n} \cdot \sin\frac{2\pi}{2n} \cdots \sin\frac{(n-1)\pi}{2n} = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$.

(в) Докажите, что $\cos\frac{\pi}{2n} \cdot \cos\frac{2\pi}{2n} \cdots \cos\frac{(n-1)\pi}{2n} = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$.

6. Дан приведённый многочлен $P(x)$ с вещественными коэффициентами такой, что $|P(i)| < 1$. Докажите, что существуют вещественные числа a, b, такие что $P(a + bi) = 0$ и $(a^2 + b^2 + 1)^2 < 4b^2 + 1$.

7. Дан многочлен $P(x)$ степени $n > 5$ с целыми коэффициентами, имеющий n различных целых корней. Докажите, что многочлен $P(x) + 3$ имеет n различных действительных корней.