

Точка Шалтая

Точкой Шалтая треугольника ABC со стороны вершины A (или A -Шалтаем) назовём такую точку Ш (Ш_a), что

$$\angle BAH = \angle CBH \quad \text{и} \quad \angle CAH = \angle BCH.$$

Зафиксируем обозначения, действующие в теоретической части этого листочка: пусть в остроугольном треугольнике ABC

- H — точка пересечения высот AA_1 , BB_1 , CC_1 ;
- M — середина стороны BC ;
- D — точка пересечения прямых BC и B_1C_1 ;
- H' — точка, симметричная H относительно BC ;
- L — пересечение симедианы из вершины A с (ABC) .

Теория.

1. Докажите, что
 - (а) Ш лежит на AM ;
 - (б) Ш лежит на (BHC) ;
 - (в) Ш — проекция H на AM ;
 - (г) Ш — центр поворотной гомотетии, переводящей BB_1 в CC_1 ;
 - (д) Ш и L симметричны относительно BC ;
 - (е) $\text{Ш}B/\text{Ш}C = AB/AC$;
 - (ж) $BC_1\text{Ш}M$ и $B_1C\text{Ш}M$ — вписанные;
 - (з) D лежит на прямой $H\text{Ш}$.

Упражнение. Пусть $\text{Ш}'$ — H -Шалтай треугольника BHC . Нарисуйте для неё все факты из задачи 1.

2. Докажите, что B_1 , C_1 , L и H' лежат на одной окружности.
3. Докажите, что окружность (ADH) проходит через середину отрезка B_1C_1 .
4. Докажите, что A , M , H' и точка пересечения прямых BC и B_1C_1 лежат на одной окружности.
5. Касательные к (ABC) в вершинах B и C пересекаются в точке T . Докажите, что $\text{Ш}'$, A_1 , L и середина отрезка MT лежат на одной прямой.

Практика.

6. На сторонах BA и AC треугольника ABC выбираются такие переменные точки D и E соответственно, что CD и BE пересекаются на окружности (ADE) . Докажите, что центры всех таких окружностей (ADE) лежат на фиксированной прямой, не зависящей от выбора D и E .
7. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке P , а M — середина AB . Касательная к (MAD) в точке A и касательная к (MBC) в точке B пересекаются в точке Q . Докажите, что точки Q , M и P лежат на одной прямой.
8. На одной из медиан треугольника ABC нашлась такая точка P , что $\angle PAB = \angle PBC = \angle PCA$. Докажите, что на другой медиане найдётся такая точка Q , что $\angle QBA = \angle QCB = \angle QAC$.
9. Дан вписанный четырёхугольник $ABCD$. Рассмотрим четыре точки Шалтая: треугольника DAB со стороны вершины A , треугольника ABC со стороны вершины B , треугольника BCD со стороны вершины C , треугольника CDA со стороны вершины D . Докажите, что они лежат на одной окружности.
10. Дан вписанный четырёхугольник $ABCD$. Его диагонали пересекаются в точке Q , а лучи CB и DA — в точке P ; M и N — середины сторон AB и CD соответственно. Докажите, что (MQN) касается PQ .