

## По мотивам ММО и Турнира Городов

1. Каждую грань правильного октаэдра разбили средними линиями на правильные треугольники (всего получилось 32 одинаковых маленьких правильных треугольника). Какое наибольшее число этих треугольников можно закрасить так, чтобы закрасенные треугольники не имели общих вершин?
2. Полина записала число, оканчивающееся на 2026. А Стёпа посчитал сумму всех натуральных делителей этого числа (включая 1 и само число). Мог ли он получить число 1000000001?
3. (а) Король решил испытать своего придворного мудреца. Он выложил 144 внешне одинаковые золотые монеты в виде квадрата  $12 \times 12$  и сообщил, что среди них ровно 12 фальшивых монет, которые лежат в ряд (по горизонтали или по вертикали). Все настоящие монеты весят одинаково, а фальшивые могут весить по-разному, но каждая из них легче настоящей. Король просит найти 100 настоящих монет за два взвешивания на чашечных весах без гирь. Может ли мудрец действовать так, чтобы гарантированно справиться с заданием короля?  
(б) А 110 монет?  
(в) Какое наибольшее количество монет можно найти?
4. На стороне  $BC$  треугольника  $ABC$  выбраны точки  $D$  и  $E$  так, что  $BD = DE = CE$ . На отрезках  $AB$ ,  $AC$ ,  $AE$  и  $AD$  выбраны точки  $L, K, P$  и  $Q$  (все точки  $A, B, C, D, E, K, L, P, Q$  различные) соответственно так, что

$$\angle EAD = \angle PDE = \angle QED = \angle AKP = \angle ALQ$$

Докажите, что  $LK + DE \leq AD + AE$ .

5. В совет входит  $n \geq 5$  эльфов, каждый из которых доверяет одному или нескольким другим эльфам (доверие необязательно взаимно). Они хотят, чтобы один из эльфов взял Кольцо Всевластья, а затем текущий владелец Кольца передавал его одному из тех, кому доверяет. Известно, что так от любого эльфа Кольцо может перейти (необязательно напрямую) к любому другому. Эльфы хотят действовать так, чтобы в результате  $k$  передач Кольца оно хотя бы раз побывало у каждого эльфа. При каком наименьшем  $k$  (для данного  $n$ ) у них обязательно получится это сделать (вне зависимости от того, кто кому доверяет)?
6. Существует ли выпуклый пятиугольник со свойством: для каждой точки на его границе найдётся квадрат, вписанный в пятиугольник, и такой, что выбранная точка является одной из вершин квадрата? (Квадрат считается вписанным, если все его вершины лежат на границе пятиугольника.)