

Угадайте что

1. Существуют ли такие три попарно различных натуральных числа a , b и c , что числа $a + b + c$ и $a \cdot b \cdot c$ являются квадратами некоторых натуральных чисел?
2. В строку выписано 89 ненулевых чисел. Сумма любых двух соседних чисел положительна, а сумма всех чисел отрицательна. Каким может быть знак произведения всех чисел?
3. Король вызвал двух мудрецов и объявил им задание: первый задумывает 7 различных натуральных чисел с суммой 100, тайно сообщает их королю, а второму мудрецу называет лишь четвертое по величине из этих чисел, после чего второй должен отгадать задуманные числа. У мудрецов нет возможности сговориться. Могут ли мудрецы гарантированно справиться с заданием?
4. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA' и BB' . Точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC . Докажите, что расстояние от точки A' до прямой BO равно расстоянию от точки B' до прямой AO .
5. У Тани есть 4 одинаковые с виду гири, массы которых равны 1001, 1002, 1004 и 1005 г. (неизвестно, где какая), и чашечные весы (показывающие, какая из двух чаш перевесила или что имеет место равенство). Может ли Таня за 4 взвешивания гарантированно определить, где какая гиря? (Следующее взвешивание выбирается по результатам прошедших.)
6. Биссектриса угла ABC пересекает описанную окружность ω треугольника ABC в точках B и L . Точка M — середина отрезка AC . На дуге ABC окружности ω выбрана точка E так, что $EM \parallel BL$. Прямые AB и BC пересекают прямую EL в точках P и Q соответственно. Докажите, что $PE = EQ$.
7. В некотором государстве сложение и вычитание обозначаются знаками «!» и «?», но вам неизвестно, какой знак какой операции соответствует. Каждая операция применяется к двум числам, но про вычитание вам неизвестно, вычитается левое число из правого или правое из левого. Например, выражение $a?b$ обозначает одно из следующих: $a - b$, $b - a$ или $a + b$. Вам неизвестно, как записываются числа в этом государстве, но переменные a , b и скобки есть и используются как обычно. Можно ли с помощью них и знаков «!» и «?» записать выражение, которое гарантированно равно $2026a - 89b$?