

Разнобой

1. Петя расставляет 500 королей на клетках доски 100×50 так, чтобы они не били друг друга. А Вася — 500 королей на белых клетках (в шахматной раскраске) доски 100×100 так, чтобы они не били друг друга. У кого больше способов это сделать?
2. Дана клетчатая полоска из $2n$ клеток, пронумерованных слева направо следующим образом:

$$1, 2, 3, \dots, n, -n, \dots, -2, -1$$

По этой полоске перемещают фишку, каждым ходом сдвигая её на то число клеток, которое указано в текущей клетке (вправо, если число положительно, и влево, если отрицательно). Известно, что фишка, начав с любой клетки, обойдёт все клетки полоски. Докажите, что число $2n + 1$ — простое.

3. Клетки шахматной доски 8×8 занумерованы числами от 1 до 32 так, что каждое число использовано дважды. Докажите, что можно выбрать 32 клетки, занумерованные разными числами, так, что на каждой вертикали и в каждой горизонтали найдётся хотя бы по одной выбранной клетке.