

## Комплексные числа и тригонометрия

**Тригонометрической записью** комплексного числа  $z$  называется его представление в виде  $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ . Здесь  $r = |z|$ , а число  $\varphi$  называется **аргументом** комплексного числа и обозначается  $\varphi = \text{Arg}(z)$ .

- (а) Докажите, что при умножении (делении) комплексных чисел их модули перемножаются (делятся), а аргументы складываются (вычитаются).  
(б) Выведите *формулу Муавра*:

$$z^n = \left( r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \right)^n = r^n \left( \cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi) \right).$$

**Корнями  $n$ -ой степени** из числа  $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$  называются решения уравнения  $w^n = z$ . Этих решений ровно  $n$  штук, и они имеют вид

$$w_k = r^{1/n} \left( \cos \left( \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right) + i \sin \left( \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right) \right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

- Вычислите значения выражений:

(а)  $\left( \frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{100}$  (б)  $\left( \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i} \right)^n$  (в)  $\sqrt[6]{-729}$ .

- Найдите, чему равна сумма корней  $n$ -ой степени из  $z$ .

- Вычислите суммы:

(а)  $C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - \dots$

(б)  $\cos(\varphi) + \cos(2\varphi) + \dots + \cos(n\varphi)$  и  $\sin(\varphi) + \sin(2\varphi) + \dots + \sin(n\varphi)$

(в)  $C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + \dots$

- (а) Докажите, что  $\text{Arg}(z) - \text{Arg}(w) = \text{Arg}(z\bar{w})$  с точностью до прибавления  $2\pi$ .

(б) Докажите, что  $\frac{z\bar{w} + \bar{z}w}{2} = |z||w| \cos \alpha$  и  $\frac{z\bar{w} - \bar{z}w}{2i} = |z||w| \sin \alpha$ , где  $\alpha$  — угол между векторами  $z$  и  $w$ .

- (а) Вещественные числа  $\alpha, \beta, \gamma$  таковы, что  $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 0$ ,  $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 0$ . Докажите, что  $\cos(2\alpha) + \cos(2\beta) + \cos(2\gamma) = 0$  и  $\sin(2\alpha) + \sin(2\beta) + \sin(2\gamma) = 0$ .

(б) Вещественные числа  $\alpha, \beta, \gamma$  таковы, что  $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 1$  и  $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 1$ . Чему равно минимально возможное значение  $\cos \alpha - \sin \alpha$ ?

- Пусть  $M \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$  — множество, удовлетворяющее свойству: если  $x, y \in M$ , то  $\frac{x}{y} \in M$ . Известно, что  $M$  состоит из  $n$  элементов. Найдите  $M$ .

- Дано комплексное число  $z$ , такое, что  $|z| = 1$ . Докажите, что  $|1-z| + |1+z^2| \geq \sqrt{2}$ .