Направления

Зафиксируем на плоскости произвольную прямую ℓ_0.

Определение. *Направлением* $\overline{\ell}$ произвольной прямой ℓ будем называть направленный угол $\angle(\ell_0, \ell)$.

Основные свойства.

- $\angle(\ell_1, \ell_2) = \overline{\ell_2} - \overline{\ell_1}$;
- $\overline{\ell_1} + \overline{\ell_2} = 2\overline{\ell} \iff$ прямая ℓ параллельна биссектрисе одного из углов, образованных прямыми ℓ_1 и ℓ_2;
- Точки A, B, C, D, никакие три из которых не лежат на одной прямой, лежат на одной окружности тогда и только тогда, когда выполнено по крайней мере одно из равенств

$$\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AC} + \overline{BD}, \quad \overline{AC} + \overline{BD} = \overline{AD} + \overline{BC}, \quad \overline{AD} + \overline{BC} = \overline{AB} + \overline{CD}.$$

1. Окружность ω пересекает стороны AB, BC, CD и DA вписанного четырёхугольника $ABCD$ в парах точек E, F; G, H; I, J и K, L соответственно. Докажите, что четыре точки пересечения диагоналей выпуклого четырёхугольника $EFIJ$ с диагоналями выпуклого четырёхугольника $GHKL$ лежат на одной окружности.

2. Из точки X, лежащей на касательной к (ABC), восстановленной в точке A, опустили перпендикуляры XP и XQ на прямые AC и AB соответственно. Докажите, что $PQ \perp BC$.

3. Четырёхугольник $ABCD$ описан около окружности с центром I. Точки O_1 и O_2 — центры окружностей (AID) и (CID). Докажите, что центр окружности (O_1IO_2) лежит на биссектрисе угла B четырёхугольника $ABCD$.

4. Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC, которая касается сторон AC и AB в точках D и E соответственно. Окружности (BID) и (CIE) повторно пересекают (ABC) вторично в точках F и G соответственно. Докажите, что точки D, E, F и G лежат на одной окружности.

5. На плоскости даны точки A, B, C, D общего положения. Докажите, что окружности девяти точек треугольников ABC, ABD, ACD, BCD имеют общую точку.

6. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность ω радиуса r. Диагонали AC и BD пересекаются в точке P. Точка S — основание перпендикуляра из P на AB, а точка Q на продолжении луча SP за P такова, что $PQ = r$. Докажите, что если $AD = DP$, то перпендикуляры из A на CQ и из B на DQ пересекаются на ω.

7. Окружность, вписанная в четырёхугольник $ABCD$, касается его сторон DA, AB, BC и CD в точках K, L, M и N соответственно. Пусть ω_1, ω_2 , ω_3 и ω_4 — окружности, вписанные в треугольники AKL, BLM, CMN и DNK соответственно. К окружностям ω_1 и ω_2, ω_2 и ω_3, ω_3 и ω_4, ω_4 и ω_1 проведены общие касательные, отличные от сторон четырёхугольника $ABCD$. Докажите, что четырёхугольник, образованный этими четырьмя касательными, — ромб.

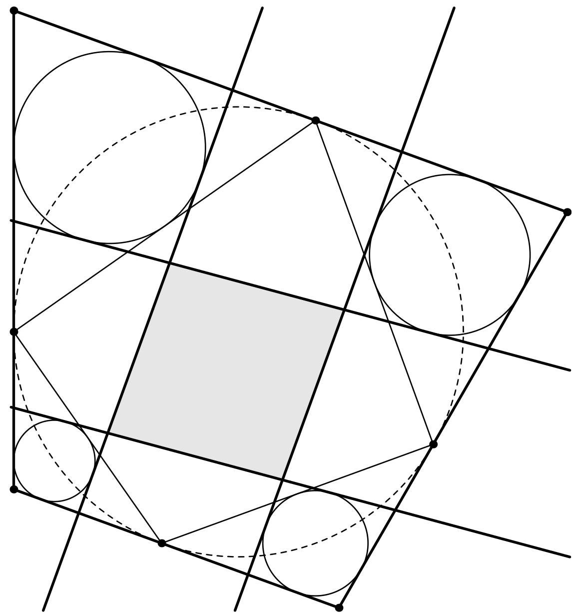

Рисунок к задаче 7