Комплексные числа, знакомство

Комплексные числа — это формальные выражения вида $z = x + iy$, где x и y — действительные, а i — *мнимая единица*, т.е. «число», квадрат которого равен -1. Числа x, y называются, соответственно, *действительной* и *мнимой* частью комплексного числа z и обозначаются $x = \operatorname{Re} z, y = \operatorname{Im} z$. Множество всех комплексных чисел обозначается $\mathbb{C}$.

Нетрудно проверить, что выполняются естественные свойства: ассоциативность и коммутативность сложения и умножения, а также дистрибутивность:
$z + w = w + z, (z + w) + v = z + (w + v), zw = wz, (zw)v = z(wv), z(w + v) = zw + zv.$
Иными словами, с выражениями из комплексных чисел можно работать как с выражениями из вещественных чисел или из вычетов по некоторому модулю.

Сопряжённым числом к $z = x + iy$ называют число $\bar{z} = x - iy$.

Модулем числа $z = x + iy$ называют число $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

1. Докажите, что
(а) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$; $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$; $\overline{z/w} = \overline{z}/\overline{w}$; $\overline{\overline{z}} = z$;
(б) $|z|^2 = z\overline{z}$; $\operatorname{Re} z = \frac{z+\overline{z}}{2}$; $\operatorname{Im} z = \frac{z-\overline{z}}{2i}$.

2. **(а)** Вычислите $\frac{(2-3i)(3+4i)+i+2}{3+i}$.
(б) Решите уравнение $x^2 = 24i - 7$.
(в) Решите уравнение $(1 - i)x^2 - 4x + 1 + 3i = 0$.

3. Пусть $P(x, y)$ — многочлен с действительными коэффициентами. Докажите, что $\overline{P(z, \overline{z})} = P(\overline{z}, z)$. В частности, если z — корень многочлена $Q(x)$ с действительными коэффициентами, то $\overline{z}$ — также корень $Q(x)$.

4. Даны n чисел, каждое из которых является суммой квадратов двух целых чисел. Докажите, что их произведение также является суммой квадратов двух целых чисел.

5. Даны комплексные числа z_1, z_2, такие что $|z_1| = |z_2| = 1$ и $z_1z_2 \neq -1$. Докажите, что $\frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}$ — вещественное число.

6. Комплексные числа a, b, c имеют модуль 1. Найдите $\left|\frac{a+b+c}{ab+ac+bc}\right|$.

7. Даны комплексные числа a, b, c. Докажите, что $\operatorname{Re}(a-c)(\overline{c}-\overline{b}) \geqslant 0$ тогда и только тогда, когда $\left|c - \frac{a+b}{2}\right| \leqslant \frac{1}{2}|a - b|$.

8. Пусть $z_1, z_2, \ldots z_n$ — точки комплексной плоскости в вершинах выпуклого n-угольника. Точка z такова, что

$$\frac{1}{z - z_1} + \frac{1}{z - z_2} + \ldots + \frac{1}{z - z_n} = 0.$$

Докажите, что точка z лежит внутри этого n-угольника.