Направленные углы

Определение. *Направленным углом* $\angle(\ell_1, \ell_2)$ между прямыми ℓ_1 и ℓ_2 называют угол, на который надо повернуть прямую ℓ_1 против часовой стрелки, чтобы получить прямую, параллельную ℓ_2. Значение направленного угла определено с точностью до $180°$.

Основные свойства направленных углов:

- $\angle(\ell_1, \ell_2) = -\angle(\ell_2, \ell_1)$;
- $\angle(\ell_1, \ell_2) + \angle(\ell_2, \ell_3) = \angle(\ell_1, \ell_3)$;
- $\angle(\ell_1, \ell_2) = 0 \iff \ell_1 \parallel \ell_2$;
- $\angle(XB, BC) = \angle(XB, BA)$ для некоторой точки $X \iff A, B, C$ лежат на одной прямой;
- $\angle(AB, BC) = \angle(AD, DC) \iff A, B, C, D$ лежат на одной окружности или прямой;
- $\angle(AB, BC) = -\angle(AC, CB) \iff AB = BC$ или A, B, C лежат на одной прямой.

Пример. Дан треугольник ABC. На прямых AB, AC, BC выбраны точки C_1, B_1, A_1 соответственно. Тогда окружности (AB_1C_1), (A_1BC_1), (A_1B_1C) пересекаются в одной точке.

Замечание 1. Равенства с направленными углами нельзя делить. Например, попробуйте поделить на 2 верное равенство $\angle(\ell_1, \ell_2) = 180° + \angle(\ell_1, \ell_2)$.

Замечание 2. Для удобства можно вместо обозначения $\angle(AB, BC)$ использовать обозначение $\measuredangle ABC$. **НО** на этом занятии это **ЗАПРЕЩЕНО**.

1. **Лемма Фусса.** Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках M и N. Две прямые, проведённые через точки M и N, пересекают второй раз окружность ω_1 в точках A и C соответственно и вторично пересекают окружность ω_2 в точках B и D соответственно. Докажите, что $AC \parallel BD$.

   Указание. Определите, сколько существенно разных вариантов расположений точек возможно в данной задаче, запишите короткое решение в направленных углах и убедитесь, что оно работает во всех этих случаях.

2. На стороне BC треугольника ABC отмечены точки P и Q так, что $\angle BAP = \angle CAQ$. Докажите, что центры описанных окружностей треугольников ABP, ABQ, ACP, ACQ лежат на одной окружности.

3. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A_1 и B_1, окружности ω_2 и ω_3 — в точках A_2 и B_2, окружности ω_3 и ω_4 — в точках A_3 и B_3, окружности ω_4 и ω_1 — в точках A_4 и B_4. Докажите, что если точки A_1, A_2, A_3, A_4 лежат на одной окружности или прямой, то точки B_1, B_2, B_3, B_4 лежат на одной окружности или прямой.

4. Точки A', B', C' соответственно симметричны вершинам A, B, C относительно противоположных сторон треугольника ABC. Докажите, что описанные окружности треугольников $AB'C'$, $A'BC'$ и $A'B'C$ пересекаются в одной точке.

5. На окружности с центром O выбраны точки A, B, C, D. Прямые AB и CD пересекаются в точке P. Окружности (ADP) и (BCP) повторно пересекаются в точке Q. Докажите, что точки A, C, O, Q лежат на одной окружности.

6. Точки O и I — центры соответственно описанной и вписанной окружностей равнобедренного треугольника ABC с основанием BC. Окружности (ABC) и (BIO) вторично пересекаются в точке D. Докажите, что прямая AD касается окружности BIO.

7. Прямые ℓ_1 и ℓ_2 перпендикулярны и пересекают прямые, содержащие стороны треугольника ABC, в парах точек, симметричных относительно середин соответствующих сторон треугольника ABC. Докажите, что точка пересечения ℓ_1 и ℓ_2 лежит на окружности Эйлера треугольника ABC.

8. Докажите, что если точки P и Q инверсны относительно описанной окружности треугольника ABC, то треугольники из оснований перпендикуляров из этих точек на прямые AB, BC и CA подобны.

9. Внутри вписанного четырёхугольника $ABCD$ нашлась такая точка X, что выполнено равенство $\angle XAB = \angle XBC = \angle XCD = \angle XDA$. Продолжения пар противоположных сторон AB и CD, BC и DA пересекаются в точках P и Q соответственно. Докажите, что $\angle PXQ$ равен углу между диагоналями AC и BD.