Неравенства в ТЧ

1. Докажите, что если $2 < p < q$ — два последовательных простых числа, то в разложении их суммы на простые множители есть по крайней мере 3 сомножителя (необязательно различных).

2. Пусть натуральное число n таково, что

$$\text{НОД}(n, n+1) < \text{НОД}(n, n+2) < \ldots < \text{НОД}(n, n+35).$$

Докажите, что $\text{НОД}(n, n+35) < \text{НОД}(n, n+36)$.

3. Пусть n — натуральное число, d_1 и d_2 — два его делителя, причём $d_1 < d_2$. Докажите неравенство $d_2 > d_1 + d_1^2/n$.

4. Про различные натуральные числа a и b известно, что

$$a^2 + ab + b^2 \mid ab(a+b).$$

Докажите, что $|a-b| > \sqrt[3]{ab}$.

5. Назовем тройку натуральных чисел a, b, c *вызывающей интерес*, если

$$c^2 + 1 \mid (a^2+1)(b^2+1),$$

но ни один из двух множителей сам не кратен $c^2 + 1$.

Дана вызывающая интерес тройка a, b, c. Докажите, что существуют натуральные числа u, v, для которых тройка u, v, c вызывает интерес и $uv < c^3$.

6. Пусть $S(a)$ — сумма цифр натурального числа a. Докажите, что существует бесконечно много таких натуральных n, что

(а) $S(3^n) \geqslant S(3^{n+1})$; **(б)** $S(2^n) > S(2^{n+1})$.

7. Докажите, что при $n \geqslant 2$ каждое из чисел

$$n! + 2,\ n! + 3,\ \ldots,\ n! + n$$

имеет простой делитель, который не делит никакое другое число из этого списка.