

Простые задачи

1. Можно ли число $\frac{1}{10}$ представить в виде произведения десяти положительных правильных дробей?
2. Известно, что лжецы всегда врут, рыцари всегда говорят правду, а хитрецы могут как врать, так и говорить правду. Разрешается задавать вопросы, на которые есть ответ «да» или «нет». Перед вами **(а)** трое — лжец, рыцарь и хитрец; **(б)** четверо — лжец, рыцарь и два хитреца; причём все они знают друг про друга кто есть кто. Можно ли определить наверняка, кто из них кто?
3. За круглым столом сидят n человек. Любой человек может встать и пересесть в любой промежуток между двумя людьми, сидящими рядом. Какое наименьшее число таких перестановок необходимо сделать, чтобы в результате каждые два соседа остались бы соседями, но сидели бы в обратном порядке?
4. Из произвольной точки круглого бильярдного стола пущен шар. Докажите, что внутри стола найдётся такая окружность, что траектория шара её ни разу не пересечёт.
5. Найдите все натуральные числа n , для которых выполняется равенство $p(n) = n^2 - 10n - 22$, где $p(n)$ — произведение цифр числа n .
6. Серёжа выбрал два различных простых числа p и q . Он считает натуральное число n *хорошим*, если число $p + q$ можно представить в виде суммы ровно q чисел, каждое из которых имеет вид n^k при целом неотрицательном k . Докажите, что Серёжа считает хорошими не более двух чисел.
7. 199 волейбольных команд сыграли турнир в один круг, причём все команды одержали поровну побед. Докажите, что из этих команд можно выбрать 33 непересекающиеся тройки, в каждой из которых все команды выиграли друг у друга по циклу.
8. Вася задумал 8 клеток шахматной доски, никакие две из которых не лежат в одной строке или в одном столбце. За ход Петя выставляет на доску 8 ладей, не бьющих друг друга, а затем Вася указывает все лады, стоящие на задуманных клетках. Если количество ладей, указанных Васей на этом ходе, чётно (т.е. 0, 2, 4, 6 или 8), то Петя выигрывает; иначе все фигуры снимаются с доски и Петя делает следующий ход. За какое наименьшее число ходов Петя сможет гарантированно выиграть?