Алгебраический разнобой

1. Последовательность (a_n) задана условиями $a_1 = 0, \quad a_{n+1} = \frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n} + 1$. Докажите, что $a_{2026} > \frac{1}{2} + a_{1000}$.

2. Последовательности $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}, \{d_n\}$ удовлетворяют следующим соотношениям:

$$a_{n+1} = a_n + b_n, \quad b_{n+1} = b_n + c_n, \quad c_{n+1} = c_n + d_n, \quad d_{n+1} = d_n + a_n.$$

Известно, что все эти последовательности периодичны. Докажите, что их вторые члены равны 0.

3. Пусть $a_1, a_2, \dots, a_{2026}$ — перестановка чисел $1, 2, 3, \dots, 2026$. Какое максимальное число точных квадратов может быть среди чисел

$$a_1^2 + a_2,\ a_2^2 + a_3,\ a_3^2 + a_4,\ \dots,\ a_{2025}^2 + a_{2026},\ a_{2026}^2 + a_1?$$

4. Даны два нечётных натуральных числа a и b. Докажите, что существует такое натуральное k, что хотя бы одно из чисел $b^k - a^2$ и $a^k - b^2$ делится на 2^{2026}.

5. Натуральное число a и простое p таковы, что НОД$(a, p!) = 1$. Докажите, что $a^{(p-1)!} - 1$ делится на $p!$.

6. Два различных простых числа p и q отличаются менее чем в два раза. Докажите, что существуют такие два последовательных натуральных числа, что у одного из них наибольший простой делитель равен p, а у другого — q.

7. Решите уравнение в простых числах $p^3 + q^3 + r^3 = p^2qr$.

8. Положительные числа a, b, c таковы, что $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \geqslant 3$. Докажите, что

$$\frac{a^3}{a^2+b} + \frac{b^3}{b^2+c} + \frac{c^3}{c^2+a} \geqslant \frac{3}{2}.$$