Региональный разнобой 2

1. В остроугольном треугольнике ABC проведена высота AH. Точки M и N — середины отрезков BH и CH соответственно. Докажите, что точка пересечения перпендикуляров, опущенных из точек M и N на прямые AB и AC соответственно, равноудалена от точек B и C.

2. В углы треугольника ABC вписаны три окружности одинакового радиуса. Каждая из них касается двух сторон треугольника. Вершины треугольника UVW лежат на разных сторонах треугольника ABC, и каждое ребро UVW также касается одной из трех окружностей.

Аналогично, вершины треугольника PQR лежат на разных сторонах треугольника ABC, и каждое ребро PQR также касается одной из трех окружностей. Докажите, что радиусы вписанных окружностей UVW и PQR равны.

3. На сторонах AD и CD параллелограмма $ABCD$ с центром O отмечены такие точки P и Q соответственно, что $\angle AOP = \angle COQ = \angle ABC$. Докажите, что
(а) $\angle ABP = \angle CBQ$;
(б) прямые AQ и CP пересекаются на описанной окружности треугольника ABC.

4. На сторонах BC, CA, AB треугольника ABC нашлись такие точки D, E, F, что центр вписанной окружности треугольника DEF совпадает с центром вписанной окружности ABC, а радиус в 2 раза меньше. Докажите, что тогда ABC — правильный.

5. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O, причём точка O не лежит ни на одной из диагоналей этого четырёхугольника. Известно, что центр описанной окружности треугольника AOC лежит на прямой BD. Докажите, что центр описанной окружности треугольника BOD лежит на прямой AC.