

Тренировочная олимпиада

Задача 1. Можно ли числа от 99 до 200 (включительно) выписать в ряд, используя каждое ровно 1 раз, так, чтобы любые два числа, стоящих рядом, отличались либо на 2, либо в 2 раза?

Задача 2. В школе действует несколько математических кружков, причём для любых двух найдётся хотя бы один школьник, который ходит на оба кружка. Докажите, что школьникам можно раздать линейки и циркули так, что ровно один школьник получит оба инструмента, а также среди участников каждого кружка будут школьники как с линейкой, так и с циркулем.

Задача 3. Положительные вещественные числа $x > y$ удовлетворяют соотношению

$$\left| \cdots \left| |x| - y \right| - x \right| \cdots - y \right| - x \right| = \left| \cdots \left| |y| - x \right| - y \right| \cdots - x \right| - y \right|,$$

в котором в каждой части равенства стоит ровно 51 знак модуля $|\cdot|$. Чему может равняться их отношение $x : y$?

Задача 4. У Васи есть доска $n \times n$. Вася желает разместить на ней $2n - 1$ слонов, не бьющих друг друга. С этой целью он решил поставить на одну из клеток фишку, через которую слоны не бьют. Сколькими способами он может поставить эту фишку так, чтобы его желание о расстановке $2n - 1$ слонов стало осуществимо? (Сама фишка никого не бьёт, а только мешает слонам бить друг друга.)

Задача 5. Пусть в треугольнике ABC вписанная окружность ω касается сторон BC и AC в точках A_1 и B_1 соответственно. Точки A_2 и B_2 диаметрально противоположны точкам A_1 и B_1 на ω . Обозначим описанную окружность треугольника ABC через Ω . Докажите, что центр описанной окружности треугольника AA_2B_1 лежит на Ω тогда и только тогда, когда центр описанной окружности треугольника BB_2A_1 лежит на Ω .