Диагностическая работа. Очный этап.

Задача 1. Натуральные числа от 1 до 300 разбиты на 100 троек. Если некоторая тройка состоит из чисел $a < b < c$, то тогда разности $b - a$ и $c - b$ не меньше 100. Найдите все такие разбиения.

Ответ: подходит только разбиение на тройки вида $\{k, k + 100, k + 200\}$, где $k = 1, 2, \dots, 100$.

Решение. Поскольку в каждой тройке $b - a \geqslant 100$, $c - b \geqslant 100$, то в каждой тройке $c \geqslant 201$, $b \geqslant 101$. Значит, наибольшие числа во всех тройках — это в точности числа из набора $C = \{201, 202, \dots, 300\}$, средние числа — в точности числа из набора $B = \{101, 102, \dots, 200\}$, а меньшие числа — в точности числа из набора $A = \{1, 2, \dots, 100\}$ (в каком-то порядке).

Индукцией по $k = 1, \dots, 100$ докажем, что наименьшее число тройки, в которую входит число $100 + k$, равно k. База: $k = 1$. Заметим, что наименьшее число в тройке, в которую входит число 101, по условию не превосходит 1, то есть равно 1. Переход: рассмотрим тройку, в которую входит число $100+k+1$. Наименьшее число в его тройке, с одной стороны, не превосходит $k + 1$, а, с другой стороны, не равно $1, 2, \dots, k$ по предположению индукции. Значит, оно равно $k + 1$.

Проводя аналогичное рассуждение, получаем, что наибольшее число тройки, в которую входит число $100 + k$, равно $200 + k$. Тем самым разбиение из условия задачи определено однозначно. $\square$

Задача 2. В треугольнике ABC на стороне AB нашлась такая точка X, что $2BX = BA + BC$. Точка Y симметрична центру I вписанной окружности треугольника ABC относительно точки X. Докажите, что YI_B перпендикулярно AB, где I_B — центр вневписанной со стороны AC окружности треугольника ABC.

Решение. Отметим точку M — середину дуги AC описанной окружности треугольника ABC, не содержащую точку B, а также центр I_B вневписанной окружности, соответствующей вершине B. По лемме о трезубце $MA = MC = MI = MI_B$, а также M является серединой отрезка II_B, откуда следует, что MX является средней линией треугольника IYI_B, поэтому осталось проверить, что $MX \perp AB$

Для этого отметим на луче BC точку Z такую, что $BZ = BX = \frac{BA+BC}{2}$. По трем сторонам треугольники MAX и MCZ равны, откуда будет следовать, что четырехугольник $BXMC$ вписанный, а поскольку он является дельтоидом, что $\angle BXM = 90°$. $\square$

Задача 3. На интервале $(0; 1)$ числовой прямой сидит точечная лягушка. Каждую минуту она совершает прыжок по следующему принципу:

- если лягушка сидит ближе к точке 0, чем к точке 1, лягушка прыгает так, чтобы расстояние от неё до точки 0 удвоилось;

- если лягушка сидит ближе к точке 1, чем к точке 0, лягушка прыгает так, чтобы расстояние от неё до точки 1 удвоилось.

Лягушка совершает неограниченное число прыжков. При этом стартовая точка выбирается так, что лягушка никогда не окажется в середине интервала $(0;1)$. Существует ли такая стартовая точка, начиная с которой лягушка никогда не побывает ни в одной точке интервала $(0;1)$ дважды?

Ответ: да.

Решение. Докажем утверждение: если стартовая точка имеет координату x, то координата лягушки через k прыжков равна $\{2^k x\}$, где через { a } обозначается дробная часть числа a.

Легко проверить, что координата x_1 лягушки после прыжка из точки x равна $2x$ либо $1-2(1-x)=2x-1$ в зависимости от того, в какой половине отрезка находилась лягушка. В обоих случаях $x_1=\{2x\}$. Тогда координата x_k лягушки после k прыжков равна

$$x_k=\{2x_{k-1}\}=\{2\{2x_{k-2}\}\}=\{4x_{k-2}\}=\ldots=\{8x_{k-3}\}=\ldots=\{2^k x\}.$$

В выкладках выше использовано равенство $k\{x\}=\{kx\}$, верное для всех целых k. Утверждение доказано.

Выберем в качестве x любое иррациональное число на интервале $(0;1)$. Если лягушка попадёт в одну и ту же точку два раза на шагах k и m, будет выполнено $\{2^k x\}=\{2^m x\}$. Значит, разность $2^k x-2^m x$ будет равна какому-то целому числу, обозначим его через n. Но тогда $x=n/(2^k-2^m)$ — рациональное число. Противоречие. $\square$

Задача 4. На доске выписан ряд чисел: $1,2,\ldots,2025,2026$. За один шаг разрешается выбрать три написанные подряд числа a, b и c, из которых ни одно не равно 0, и заменить их на тройку чисел $b-1$, $c-1$, $a-1$ в указанном порядке. Какую наименьшую сумму записанных на доске чисел можно получить, делая такие шаги?

Решение. Заметим, что остаток от деления на 3 числа, стоящего на номере n, не меняется, потому что либо берется число, стоящее на месте $n+1$, вычитается 1 и это число ставится на место n, либо берется число, стоящее на месте $n-2$, вычитается 1, и ставится на место n. Таким образом, минимальный ряд, который мы можем получить, выглядит так $1,2,0,1,2,0,\ldots,0,1,2,0,1$, сумма которого равна 2026.Таким образом, минимальный ряд, который мы можем получить, выглядит так 1, 2, 0, 1, 2, 0, …, 0, 1, 2

Заметим, что за три операции мы умеем вычитать 3 из трех подряд идущих чисел. Разделим ряд $1,2,\ldots,2025,2026$ на тройки с конца $1,(2,3,4),\ldots,(2024,2025,2026)$, и над каждой тройкой будем делать эту операцию, пока не получим в каждой тройке (2, 0, 1). $\square$

Задача 5. Дан многочлен третьей степени $P(x)$ с неотрицательными коэффициентами. Докажите, что если неравенство $P(x)\cdot P\left(\frac{1}{x}\right)\geqslant 1$ верно при $x=1$, то оно верно для любого положительного числа x.

Решение. Пусть $P(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$. Тогда

$$P(x) \cdot P\left(\frac{1}{x}\right) = (a_3x^3 + \ldots + a_0) \cdot (a_3x^{-3} + \ldots + a_0) =$$

$$= \sum_{i=0}^{3} a_i^2 + \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=0}^{i-1}(a_{i-1}a_j)(x^i + x^{-i}) \geqslant \sum_{i=0}^{3} a_i^2 + 2\sum_{i>j} a_ia_j = P(1)^2 \geqslant 1.$$

$\square$