# Региональный разнобой 1

**1.** В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ выполнены равенства $DA = AB = BC$. Пусть $M$ — середина $AB$, а точка $P$ такова, что $\angle PCA = \angle PDB = 90^\circ$. Окружность с центром в точке $O$ касается отрезков $DA$, $AB$ и $BC$. Докажите, что точки $M$, $O$ и $P$ лежат на одной прямой.

**2.** В треугольнике $ABC$ биссектрисы $BE$ и $CF$ пересекаются в точке $I$, а точки $O_1$ и $O_2$ — центры окружностей, описанных около треугольников $BIF$ и $CIE$ соответственно. Докажите, что описанные окружности треугольников $IO_1O_2$, $AEO_2$ и $AFO_1$ имеют общую точку.

**3.** Точка $I$ — центр вписанной окружности треугольника $ABC$. Вписанная окружность касается стороны $AB$ в точке $D$. Вневписанная окружность касается стороны $BC$ в точке $E$. Точка $F$ такова, что $CFDI$ — параллелограмм. Докажите, что $EF \parallel BI$.

**4.** Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке $P$. Точки $O_1$ и $O_2$ — центры окружностей, описанных около треугольников $APB$ и $CPD$ соответственно. Докажите, что $O_1O_2 > \frac{AB+CD}{4}$.

**5.** В треугольнике $ABC$ угол при вершине $A$ тупой. На сторонах $AB$, $BC$ и $AC$ выбраны точки $C_1$, $A_1$ и $B_1$ соответственно так, что $AB \parallel A_1B_1$ и $AC \parallel A_1C_1$. Касательные в точках $B$ и $C$ к описанной окружности треугольника $ABC$ пересекаются в точке $D$. Отрезок $A_1D$ пересекает окружность, описанную около треугольника $AB_1C_1$, в точке $K$. Докажите, что прямые $AK$ и $BC$ параллельны.

**6.** На сторонах $AB$ и $AC$ остроугольного $ABC$ выбраны точки $P$ и $Q$ соответственно так, что $PQ \parallel BC$. Точки $X$ и $Y$ выбраны на отрезках $BQ$ и $CP$ соответственно так, что $\angle AXP = \angle XCB$ и $\angle AYQ = \angle YBC$. Докажите, что $AX = AY$.

**7.** Медиана $AM$ треугольника $ABC$ пересекает вписанную в него окружность в точках $X$ и $Y$. Известно, что $AB = AC + AM$. Найдите $\angle XIY$, если $I$ — центр вписанной окружности.