

Комбинаторный разнбой

1. Клетки квадрата со стороной 2026 покрашены в 10 цветов, каждый цвет присутствует. Любые две соседние клетки окрашены в разные цвета. Назовём пару цветов *хорошей*, если есть две соседние по стороне клетки, окрашенные в эти цвета. Какое наименьшее количество хороших пар может быть?
2. В файл A записаны 2026 попарно различных (а) положительных (б) действительных чисел. В файл B записаны все произведения ab , где a и b — два различных числа из файла A (если для нескольких пар результат совпадает, то он записывается в файл B ровно один раз; таким образом, все числа в файле B попарно различны). Какое наименьшее количество чисел может содержать файл B ?
3. Тренер выстроил в ряд 200 волейболистов и раздал им m мячей (каждый волейболист мог получить сколько угодно мячей). Время от времени один из волейболистов кидает мяч другому (а тот ловит). Через некоторое время оказалось, что из любых двух волейболистов левый кидает правому мяч ровно два раза, а правый левому ровно один раз. При каком наименьшем m это возможно?
4. Клетчатая доска $2m \times 2n$ раскрашена в шахматную раскраску. Сколькими способами можно поставить на белые клетки такой доски mn фишек так, чтобы в одной клетке стояло не более одной фишки и никакие две фишки не стояли в соседних по диагонали клетках?
5. В компании некоторые пары людей дружат (если A дружит с B , то и B дружит с A). Оказалось, что среди каждых 100 человек в компании количество пар дружащих людей нечётно. Найдите наибольшее возможное количество человек в такой компании.
6. Из клетчатого бумажного квадрата 100×100 вырезали по границам клеток 1950 двуклеточных прямоугольников. Докажите, что из оставшейся части можно вырезать по границам клеток Т-тетраминошку — возможно, повернутую. (Если такая фигурка уже есть среди оставшихся частей, считается, что её получилось вырезать.)
7. Некоторые натуральные числа отмечены. Известно, что на каждом отрезке числовой прямой длины 1999 есть отмеченное число. Докажите, что найдётся пара отмеченных чисел, одно из которых делится на другое.