Теория и ключевые задачи группы 9

Теория

Алгебра

1. Теорема Виета, формулировка и доказательство. Теорема о рациональном корне. Листик, разбор.

2. Интерполяционный многочлен Лагранжа, существование и единственность. Листик, разбор.

3. Многочлены над $\mathbb{F}_p$, основные определения. Доказательство теоремы Вильсона через разложение на множители многочлена $x^{p-1}-1$. Любая функция $f\colon \mathbb{F}_p \to \mathbb{F}_p$ задаётся многочленом степени не выше $p-1$.

4. Существование первообразного корня по модулю p (p — нечётное простое число).

5. Лемма об уточнении показателя, формулировка и доказательство.

Геометрия

1. Радикальная ось двух окружностей, теорема о радикальном центре трёх окружностей. Листик, разбор.

2. Изогональное сопряжение. Основная теорема. Проекции изогонально сопряжённых точек на стороны треугольника лежат на одной окружности. Листик, разбор.

3. Композиция двух гомотетий является либо параллельным переносом, либо гомотетией. Теорема о трёх центрах гомотетии. Листик, разбор.

4. Существует единственная поворотная гомотетия, которая переводит отрезок в непараллельный ему отрезок. Построение центра этой гомотетии. Третья лемма о воробьях. Листик, разбор.

5. Две леммы о воробьях. Листик, разбор.

6. Двойственность поворотной гомотетии, теорема о точке Микеля.

7. Инверсия: определение, базовые свойства. При инверсии обобщённые окружности переходят в обобщённые окружности. Листик, разбор.

8. Инверсия: изменение длин отрезков, угол между обобщёнными окружностями сохраняется (формулировка). «Инверсия сохраняет углы» — что это значит? Листик, разбор.

Комбинаторика

1. Гамильтонов путь/цикл — определение. В графе G на n вершинах для любых двух несоседних вершин A и B верно $\deg A + \deg B \geqslant n-1$. Докажите, что в графе G есть гамильтонов путь. Листик, разбор.

2. Чётность перестановки — определение, транспозиция меняет чётность перестановки, чётность композиции двух перестановок. Листик, разбор.

3. Определение бинарного куба. В бинарном кубе есть гамильтонов цикл. Листик, разбор.

4. Теорема Шпернера, формулировка и доказательство через неравенство ЛЯМ. Листик, разбор.

5. Теорема Хелли на прямой и на плоскости, формулировки и доказательства. Листик, разбор.

6. Теорема Турана, две эквивалентные формулировки и доказательство. Листик, разбор.

Задачи

Алгебра

1. Известно, что $abc = 1$ и $a+b+c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. Докажите, что одно из чисел a, b, c равно 1. Листик, разбор.

2. Для различных вещественных чисел a, b, c, d, e вычислите

$$\frac{(e-a)(e-b)(e-c)}{(d-a)(d-b)(d-c)} + \frac{(e-a)(e-b)(e-d)}{(c-a)(c-b)(c-d)} + \frac{(e-a)(e-c)(e-d)}{(b-a)(b-c)(b-d)} + \frac{(e-b)(e-c)(e-d)}{(a-b)(a-c)(a-d)}$$

Листик, разбор.

3. Пусть p — простое. Можно ли расставить по кругу числа $1, 2, \ldots, p-1$ так, чтобы для любых трёх подряд идущих чисел a, b, c (именно в таком порядке) число $b^2 - ac$ делилось бы на p? Листик, разбор.

4. Докажите, что не существует многочлена (степени больше нуля) с целыми коэффициентами, принимающего при каждом натуральном значении аргумента значение, равное некоторому простому числу. Листик, разбор.

5. Существует ли многочлен с целыми коэффициентами степени n, который в точках $i = 0, 1, 2, ..., n+1$ принимает значения 2^i? Листик, разбор.

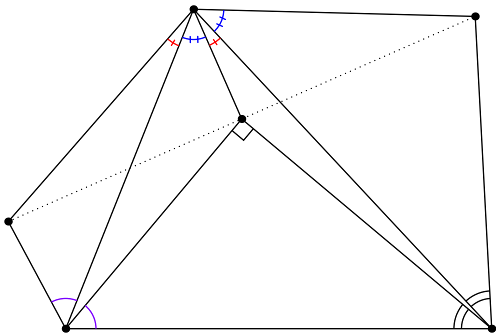
6. Докажите, что если p — простое число, то $2^p + 3^p$ не может быть точной степенью натурального числа, отличной от первой. Листик, разбор.

Геометрия

1. Две прямые, проходящие через точки пересечения пар противоположных сторон выпуклого четырёхугольника делят его на четыре меньших четырёхугольника. Докажите, что если какие-то два из этих четырёхугольников без общей стороны описанные, то и исходный четырёхугольник описанный. Листик, разбор.

2. Дан четырёхугольник $ABCD$. Прямые AB и CD пересекаются в точке E, прямые AD и BC — в точке F. Докажите, что ортоцентры треугольников AED, BEC, DFC и AFB лежат на одной прямой (**прямая Обера**) и середины отрезков AC, BD и EF лежат на одной прямой (**прямая Гаусса**), причём эти прямые перпендикулярны. Листик, разбор.

3. Смотрите картинку. Листик, разбор.



К задаче 3

4. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ лучи AB и DC пересекаются в точке P. Точка X внутри $ABCD$ такова, что $PX \perp BC$ и $\angle AXB = \angle CXD$. Докажите, что X, точка пересечения диагоналей $ABCD$ и центр описанной окружности треугольника BXC лежат на одной прямой. Листик, разбор.

5. В треугольнике ABC на стороне AB отметили точку D. Пусть ω_1 и Ω_1, ω_2 и Ω_2 — соответственно вписанные и вневписанные (касающиеся AB) окружности треугольников ACD и BCD. Докажите, что общие внешние касательные к ω_1 и ω_2, Ω_1 и Ω_2 пересекаются на прямой AB. Листик, разбор.

6. Пусть p — полупериметр треугольника ABC. Точки E и F на прямой BC таковы, что $AE = AF = p$. Докажите, что окружность (AEF) касается A-вневписанной окружности треугольника ABC. Листик, разбор.

7. Углы AOB и COD совмещаются поворотом так, что луч OA совмещается с лучом OC, а луч OB — с OD. В них вписаны окружности, пересекающиеся в точках E и F. Докажите, что углы AOE и DOF равны. Листик, разбор.

Комбинаторика

1. Докажите, что в графе 2025-мерного куба найдётся гамильтонов путь, соединяющий две противоположные вершины. Листик, разбор.

2. 2025 машин стартовали и целый день ездили по кругу. Вечером каждая машина оказалась на том же месте, откуда и стартовала. Докажите, что было совершено чётное число обгонов. Листик, разбор.

3. Детектив расследует преступление. В деле замешаны 100 человек, среди которых один — преступник, а один — свидетель. Каждый день детектив может

пригласить к себе одного или нескольких из этих 100 человек, и если среди приглашённых есть свидетель, но нет преступника, то свидетель сообщит, кто преступник. За какое наименьшее число дней детектив заведомо сможет раскрыть дело? Листик, разбор.

4. На плоскости даны несколько прямоугольников со сторонами, параллельным осям координат. Любые два из них имеют общую точку. Докажите, что тогда и все они имеют общую точку.

5. **Теорема Юнга.** На плоскости даны несколько точек, причём расстояние между любыми двумя не превосходит 1. Докажите, что все точки можно накрыть кругом радиуса $1/\sqrt{3}$.

6. В коллективе из 30 человек любых пятерых можно усадить за круглый стол таким образом, что каждый будет знаком с обоими своими соседями. Докажите, что в этом коллективе найдётся компания из 10 человек, в которой каждый знаком с каждым.

7. В некоторых узлах целочисленной решётки с неотрицательными координатами лежат фишки. За одну операцию разрешается снять фишку с узла с координатами $(i; j)$ и добавить по фишке в узлы $(i+1; j)$ и $(i; j+1)$, при этом запрещено попадание двух и более фишек в один узел.

(а) Докажите, что если изначально в трёх узлах с наименьшей суммой координат стоит по фишке, то такими операциями нельзя добиться того, чтобы они все стали пустыми.

(б) Докажите, что если изначально в узле $(0; 0)$ стоит фишка, то такими операциями нельзя сделать пустыми все шесть узлов с наименьшей суммой координат. Листик, разбор.