Крайний разнобой

Было так давно, что успели забыть

1. По окружности расставлены n действительных чисел. Если подряд стоят числа a, b, c и d и при этом $(a-d)(b-c)>0$, то числа b и c разрешается поменять местами. Докажите, что через несколько шагов больше не удастся произвести ни одной такой перестановки.

2. Длины сторон многоугольника равны $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Квадратный трёхчлен $f(x)$ таков, что $f(a_1) = f(a_2 + \ldots + a_n)$. Докажите, что если A — сумма длин нескольких сторон многоугольника, а B — сумма длин остальных его сторон, то $f(A) = f(B)$.

3. *Диагональю* клетчатой доски 6×6 назовём набор её клеток, для координат (i, j) $(1 \le i, j \le 6)$ которых и некоторого $k = 0, 1, \ldots, 5$ выполнено $i - j \equiv k \pmod 6$. (Всего получается ровно 6 диагоналей.)

Можно ли так вписать в клетки числа $1, 2, \ldots, 36$ (каждое — ровно один раз), что суммы чисел в каждой строке, каждом столбце и каждой диагонали были одинаковыми?

Было недавно, но (почти) не успели решить

4. Докажите, что $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left|\prod_{j\neq i}\frac{x-j}{i-j}\right| < 2^n$ при $1 < x < n$.

5. Полоска разбита на клетки (пронумерованные 0, 1, 2, … слева направо; будем считать, что она бесконечна вправо). В некоторых клетках находятся роботы (в каждой клетке их может быть несколько; общее число роботов конечно). В игре участвуют два игрока. В каждом раунде игры

- первый игрок делит всех роботов на два класса (произвольным образом);
- второй игрок выбирает один из классов и удаляет всех роботов этого класса;
- все оставшиеся роботы делают шаг влево на одну клетку.

Первый игрок выигрывает, если в какой-то момент в самой левой (нулевой) клетке окажется какой-то из роботов. Соответственно, второй игрок выигрывает, если ни один из роботов не успеет туда дойти (будет снят с доски раньше).

Какие начальные конфигурации выигрышны для первого и второго?

6. В остроугольном треугольнике ABC отмечены инцентр I и середина N дуги BAC описанной окружности. Прямая AN пересекает прямую BC в точке L. На отрезке AI нашлась такая точка X, что $\angle XNI = \angle ILA$. Прямая NX повторно пересекает прямую BC в точке Y. Докажите, что точка X — середина NY.

7. **(a)** Множество строк длины 31, состоящих из нулей и единиц, таково, что любые две строки в нём отличаются хотя бы в трёх разрядах. Докажите, что в этом множестве не более 2^{26} элементов.

(b*) Постройте множество из 2^{26} строк, удовлетворяющее условиям первого пункта.

8. В множестве из n элементов отметили несколько подмножеств так, что никакое отмеченное подмножество не содержится ни в одном другом отмеченном, причём любые два отмеченные подмножества пересекаются и никакие два подмножества не дают в объединении все множество. Какое наибольшее количество подмножеств может быть отмечено, если **(а)** n чётное; **(б)** n нечётное?

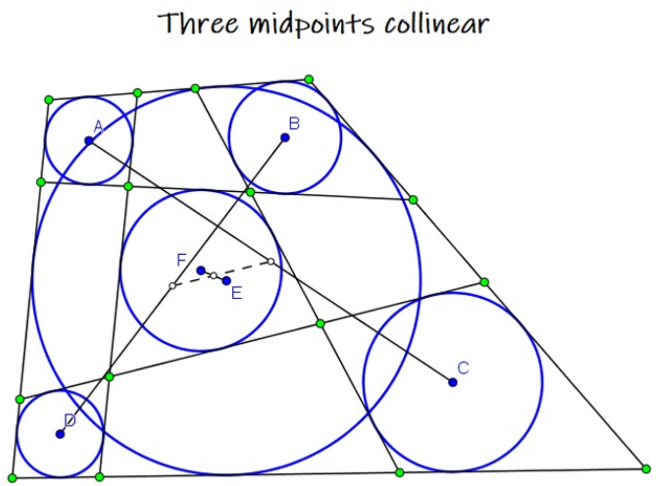
Куда пойдём дальше

9. Given points A_1, B_1, and C_1 on sides BC, CA, and AB of triangle ABC, respectively. Let I_A be the incenter of triangle AC_1B_1, and G_A the centroid of triangle AC_1B_1. Points I_B, G_B and I_C, G_C are defined similarly. Prove that

$$I_AI_B + I_BI_C + I_CI_A \geqslant G_AG_B + G_BG_C + G_CG_A.$$

10. Докажите, что для любого натурального $n > 2$ существует полный ориентированный граф на n вершинах, в котором больше $\frac{n!}{2^{n-1}}$ гамильтоновых путей.

11. Смотрите картинку.



12. Многочлен $P(x, y)$ обнуляется в вершинах некоторого правильного n-угольника $(n \geqslant 3)$ и только в них. Какая минимальная степень может быть у P?