Гармонический четырёхугольник

Определение. Вписанный четырёхугольник называется *гармоническим*, если произведения длин его противоположных сторон равны.

1. Докажите, что вписанный четырёхугольник $ABCD$ является гармоническим тогда и только тогда, когда
(а) AC — симедиана треугольника ABD;
(б) $\angle AMD = \angle ABC$, где M — середина диагонали BD;
(в) $\angle AMD = \angle CMD$.

2. Дан вписанный четырёхугольник $ABCD$. Докажите, что AC делит прямую Симсона точки D пополам тогда и только тогда, когда биссектрисы углов ABC и ADC пересекаются на AC.

3. В окружности ω проведены две параллельные хорды AB и CD. Прямая, проведённая через C и середину AB, повторно пересекает ω в точке E. Точка K — середина отрезка DE. Докажите, что $\angle AKE = \angle BKE$.

4. Симедиана треугольника ABC, проведённая из вершины A, пересекает его описанную окружность ω в точке D. Произвольная прямая, проходящая через точку A, пересекает отрезок BC в точке X, а ω — в точке Y. Докажите, что описанные окружности треугольников DXY проходят через фиксированную точку.

5. Пусть P и Q — основания внутренней и внешней биссектрис угла A треугольника ABC. Докажите, что общая хорда (ABC) и (APQ) содержит симедиану треугольника ABC.

6. Высоты BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке H. Точка M — середина стороны BC, прямая MH вторично пересекает окружность ω, построенную на AH как на диаметре, в точке X. Касательная к ω в точке X пересекает прямую B_1C_1 в точке Y. Докажите, что $YH \parallel BC$.

7. Продолжение медианы AM треугольника ABC пересекает его описанную окружность в точке D. Точка E симметрична D относительно M. Докажите, что касательная в точке A к (ABC) и касательная в точке E к (EBC) пересекаются на прямой BC.

8. В остроугольный треугольник ABC вписана окружность ω центром I, касающаяся сторон AB, BC и CA в точках D, E и F соответственно. В четырёхугольники $ADIF$ и $BDIE$ вписаны окружности с центрами J_1 и J_2 соответственно. Прямые J_1J_2 и AB пересекаются в точке M. Докажите, что $CD \perp IM$.