

Разнобой

1. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = AC$) точка D — середина основания BC , а E — основание перпендикуляра, опущенного из D на сторону AC . Прямая BE пересекает окружность, описанную около треугольника ABD , в точке $F \neq B$. Докажите, что прямая AF делит отрезок DE пополам.

2. Положительные числа a, b, c, d таковы, что $abcd = 1$. Докажите, что

$$\frac{1}{ab + bc + cd - 1} + \frac{1}{bc + cd + da - 1} + \frac{1}{cd + da + ab - 1} + \frac{1}{da + ab + bc - 1} \leq 2.$$

3. В архипелаге n островов, и между любыми двумя из них ходит катер (в обе стороны). Для каждой пары островов время в пути между ними одинаковое в обе стороны, а для разных пар островов время в пути разное. Турист хочет совершить $n-1$ поездку на катере, причём так, чтобы каждая следующая поездка длилась дольше предыдущей. Докажите, что он сможет это сделать. (Турист сам выбирает изначальный остров, он не обязан в него возвращаться, также турист согласен попадать на один и тот же остров больше одного раза.)
4. Пусть $p > 3$ — простое число. Пусть a и b натуральные взаимно простые числа. Оказалось, что

$$\left(\frac{1}{0!(p-2)!}\right)^2 + \left(\frac{1}{1!(p-3)!}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{(p-3)!1!}\right)^2 + \left(\frac{1}{(p-2)!0!}\right)^2 = \frac{a}{b}.$$

Докажите, что a делится на p .