

## Алгоритмы, лабиринты и роботы

1. Назовём лабиринтом шахматную доску  $8 \times 8$ , где между некоторыми полями вставлены перегородки. По команде ВПРАВО робот смещается на одно поле вправо или, если справа край доски или перегородка, остаётся на месте; аналогично выполняются команды ВЛЕВО, ВВЕРХ и ВНИЗ. Вадим пишет программу — конечную последовательность указанных команд — и даёт её Серёже, после чего Серёжа выбирает лабиринт и помещает в него робота на любое поле. Докажите, что Вадим может написать такую программу, что робот обойдёт все доступные поля в лабиринте при любом выборе Серёжи.
2. В одном из тысячи окопов, расположенных в ряд, спрятался робот. Пушка может одним выстрелом накрыть любой окоп. В каждом промежутке между выстрелами робот (если уцелел) обязательно перебегает в соседний окоп (быть может, только что обстрелянный). Сможет ли пушка наверняка накрыть робота?
3. Лабиринт представляет собой квадрат  $8 \times 8$ , в каждой клетке  $1 \times 1$  которого нарисована одна из четырёх стрелок (вверх, вниз, вправо, влево). Верхняя сторона правой верхней клетки — выход из лабиринта. В левой нижней клетке находится робот, который каждым своим ходом перемещается на одну клетку в направлении, указанном стрелкой. После каждого хода стрелка в клетке, в которой только что был робот, поворачивается на  $90^\circ$  по часовой стрелке. Если робот должен сделать ход, выводящий его за пределы квадрата  $8 \times 8$ , он остаётся на месте, а стрелка также поворачивается на  $90^\circ$  по часовой стрелке. Докажите, что рано или поздно робот выйдет из лабиринта.
4. Полоска разбита на клетки (пронумерованные  $0, 1, 2, \dots$  слева направо; будем считать, что она бесконечна вправо). В некоторых клетках находятся роботы (в каждой клетке их может быть несколько; общее число роботов конечно). В игре участвуют два игрока. В каждом раунде игры
  - первый игрок делит всех роботов на два класса (произвольным образом);
  - второй игрок выбирает один из классов и удаляет всех роботов этого класса;
  - все оставшиеся роботы делают шаг влево на одну клетку.

Первый игрок выигрывает, если в какой-то момент в самой левой (нулевой) клетке окажется какой-то из роботов. Соответственно, второй игрок выигрывает, если ни один из роботов не успеет туда дойти (будет снят с доски раньше).

Какие начальные конфигурации выигрышны для первого и второго?

**Указание.** Интуиция подсказывает, что если роботов «мало», то должен выигрывать второй, а иначе — первый. Попробуйте придумать какую-то величину, которая будет формализовывать понятие «мало».

5. Андрей и Гриша играют в следующую игру. Изначально на числовой прямой в точке  $p$  стоит робот. Сначала Андрей называет расстояние, на которое должен сместиться робот. Потом Гриша выбирает направление, в котором робот сместится на это расстояние, и т.д. При каких  $p$  Андрей может добиться того, что за конечное число ходов робот попадёт в одну из точек 0 или 1 вне зависимости от действий Гриши?
6. На конечной прямоугольной доске стоит несколько роботов. В одной клетке может стоять любое количество роботов. Между некоторыми клетками вставлены перегородки. Разрешается давать роботам команды ВЛЕВО, ВПРАВО, ВВЕРХ, ВНИЗ. Получив команду, все роботы одновременно выполняют её по правилам из задачи 1.
- Известно, что для всякого робота и любой клетки доски существует конечная последовательность команд, которая приводит данного робота в эту клетку. Докажите, что существует конечная последовательность команд, после выполнения которой все роботы окажутся в одной клетке.
7. В данной задаче робот — это механизм, производящий заранее определённый набор действий по определённой конечной программе. В программу робота могут входить команды следующих видов:

1. Перейти в следующую клетку;
2. Повернуться на месте на  $90$  градусов по часовой стрелке;
3. Поставить флажок в текущую клетку (если у робота есть флажок);
4. Проверить наличие флажка в текущей клетке;
5. Взять флажок из текущей клетки;
6. Перейти к шагу программы под номером  $n$ .

Докажите, что

- (а) робот с двумя флажками сможет обойти ленту — бесконечную полосу с шириной в одну клетку.
- (б) робот без флажков не сможет обойти ленту.
- (в) робот с одним флажком не сможет обойти ленту.