Последовательности

1. Найдите все строго возрастающие последовательности натуральных чисел a_1, $a_2, \ldots, a_n, \ldots$, в которых $a_2 = 2$ и $a_{nm} = a_n a_m$ для любых натуральных n и m.

2. На бесконечной доске выписана бесконечная арифметическая прогрессия натуральных чисел с ненулевой разностью. Из каждого её члена извлекли квадратный корень и, если получилось нецелое число, округлили до ближайшего целого. Могло ли оказаться, что все округления были в одну сторону?

3. **(а)** Докажите, что каждое пятое число Фибоначчи делится на 5;

(б) Докажите, что F_{mn} делится на F_m.

4. Найдите все возрастающие арифметические прогрессии с конечным числом членов, сумма которых равна 1, а каждый член имеет вид $1/k$, где k — натуральное.

5. Докажите, что существует такое число C, что если натуральные числа $a_1, \ldots, a_n$ не имеют нулей в десятичной записи, то сумма $\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}$ не превосходит C.

6. Петя прибавил к натуральному числу N натуральное число M и заметил, что сумма цифр у результата та же, что и у N. Тогда он снова прибавил M к результату, потом – ещё раз, и т. д. Обязательно ли он когда-нибудь снова получит число с той же суммой цифр, что и у N?

7. Даны две бесконечные арифметические прогрессии натуральных чисел $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ и $b_1, \ldots, b_n, \ldots$. Оказалось, что для любого натурального k число $\frac{a_k}{b_k}$ целое. Докажите, что $\frac{a_k}{b_k}$ не зависит от k.

8. Числа $1, 2, 3, \ldots, 101$ выписаны в ряд в каком-то порядке. Докажите, что из них можно вычеркнуть 90 так, что оставшиеся 11 чисел будут расположены по порядку (либо по возрастанию, либо по убыванию).