Разнобой по неравенствам

Важная мысль. В неравенствах важно следить за тем, когда достигается равенство. В частности, во всех промежуточных оценках случаи равенства должны сохраняться.

1. Для положительных чисел a, b, c докажите неравенства

(а)

$$\Big(\frac{a+b}{a+b+c}\Big)^{1/2} + \Big(\frac{a+c}{a+b+c}\Big)^{1/2} + \Big(\frac{b+c}{a+b+c}\Big)^{1/2} \leqslant \sqrt{6};$$

(б)

$$a+b+c \leqslant 2\Big(\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{a+c} + \frac{c^2}{a+b}\Big).$$

2. **(а)** Напрямую применяя неравенство о средних к слагаемым в левой части, найдите натуральное число C, для которого неравенство

$$\Big|\sum_{j=1}^{2025} a_j\Big|^2 + \Big|\sum_{j=1}^{2025} (-1)^j a_j\Big|^2 \leqslant C \sum_{j=1}^{2025} a_j^2$$

верно при любых вещественных $a_1, a_2, \ldots, a_{2025}$.

(б) Честно раскрывая скобки в левой части, найдите наименьшее такое натуральное число C.

3. Для положительных чисел a, b, c докажите неравенство

$$\Big(1+\frac{a}{b}\Big)\Big(1+\frac{b}{c}\Big)\Big(1+\frac{c}{a}\Big) \geqslant 2 + \frac{2(a+b+c)}{\sqrt[3]{abc}}.$$

4. Положительные числа a, b, c таковы, что $ab+bc+ca=1$. Докажите неравенство

$$10a^2 + 10b^2 + c^2 \geqslant 4.$$

Указание. $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$.

5. Про вещественные числа $a \geqslant b \geqslant 1 \geqslant c \geqslant 0$ известно, что $a+b+c=3$. Докажите неравенство

$$3\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \geqslant 4c^2 + \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a}.$$

6. Положительные числа a, b и c таковы, что $a+b+c=1$. Докажите неравенство

$$a\sqrt[3]{\frac{b}{a}} + b\sqrt[3]{\frac{c}{b}} + c\sqrt[3]{\frac{a}{c}} \leqslant ab+bc+ca+\frac{2}{3}.$$

7. Положительные числа a, b, c, d удовлетворяют соотношению $(a+c)^2 = 4(ad+bc)$. Докажите неравенство

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} + \frac{4bd}{ac} \geqslant 6.$$