Тригонометрия в помощь

Теорема синусов. В треугольнике ABC $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$, а R — радиус описанной окружности. Тогда $\frac{BC}{\sin\alpha} = \frac{CA}{\sin\beta} = \frac{AB}{\sin\gamma} = 2R$.

Формула площади. $S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot \sin\angle ABC$.

1. **(а) Лемма об отношении синусов** или **ratio lemma.** На стороне BC треугольника ABC отмечена точка X. Тогда

$$\frac{\sin\angle BAX}{\sin\angle XAC} = \frac{BX}{XC} : \frac{AB}{AC} \iff \frac{AB \cdot \sin\angle BAX}{AC \cdot \sin\angle CAX} = \frac{BX}{XC}.$$

(б) Теорема Чевы в синусной форме. Дан треугольник ABC. Прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда

$$\frac{\sin\angle(AB, AA_1)}{\sin\angle(AA_1, AC)} \cdot \frac{\sin\angle(AC, CC_1)}{\sin\angle(CC_1, BC)} \cdot \frac{\sin\angle(BC, BB_1)}{\sin\angle(BB_1, AB)} = 1.$$

Вопрос. Как правильно расшифровать обозначение $\angle(AB, AA_1)$ на разных картинках, возможных в теореме Чевы?

2. В треугольнике ABC провели **(а)** высоты; **(б)** биссектрисы. Выразите длины **всех** получившихся отрезков через $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$ и радиус описанной окружности R.

3. Пусть $\angle ABC < \pi$, точка X лежит внутри этого угла. Докажите, что луч BX однозначно задаётся отношением $\frac{\sin\angle ABX}{\sin\angle CBX}$.

Указание. Пусть это не так. Обозначим $\angle ABC = \beta$, $\angle ABX = \varphi_1$, $\angle ABX' = \varphi_2$. Тогда $\sin\varphi_1/\sin(\beta - \varphi_1) = \sin\varphi_2/\sin(\beta - \varphi_2)$. Домножим на знаменатели и раскроем синусы по формуле ...

4. Выпуклый шестиугольник $ABCDEF$ вписан в окружность. Докажите, что его диагонали AD, BE, CF пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда $AB \cdot CD \cdot EF = BC \cdot DE \cdot FA$.

5. В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC с центром описанной окружности O проведены высоты BB_1 и CC_1. Точки X и Y симметричны точкам B_1 и C_1 относительно середин сторон AC и AB соответственно. Докажите, что прямая AO делит отрезок XY пополам.

6. Прямая ℓ касается окружности ω_1 в точке X, а окружности ω_2 — в точке Y. Прямая ℓ', параллельная ℓ, пересекает ω_1 в точке P, а ω_2 — в точке Q. Докажите, что отношение $XP : YQ$ не зависит от прямой ℓ'.

7. Внутри угла с вершиной O отмечена точка P. Рассматриваются всевозможные пары точек X и Y на сторонах угла такие, что $\angle OPX = \angle OPY$. Докажите,что все прямые XY проходят через одну точку.

8. Чевианы AA_1, BB_1, CC_1 треугольника ABC пересекаются в одной точке. Окружность ω_A касается стороны BC в точке A_1 и меньшей дуги BC окружности (ABC) в точке A'. Аналогично определяются точки B' и C'. Докажите, что прямые AA', BB' и CC' пересекаются в одной точке.