Лемма об уточнении показателя

Для простого p и целого n через $\nu_p(n)$ будем обозначать степень вхождения p в n.

Лемма об уточнении показателя, или **LTE-лемма**. Пусть a и b — различные целые числа, k — натуральное, p — простое, не являющееся делителем a, и пусть выполнено одно из условий 1 или 2. Тогда

$$\nu_p(a^k - b^k) = \nu_p(a - b) + \nu_p(k).$$

Условие 1: $p \neq 2$, и $a - b$ делится на p.

Условие 2: $p = 2$, и $a - b$ делится на $p^2 = 4$.

1. Пусть для чисел из условия ниже выполнены условия леммы об уточнении показателя. Докажите, что
(а) $\nu_p(a^k - b^k) = \nu_p(a - b)$, если k не кратно p;
(б) $\nu_p(a^p - b^p) = \nu_p(a - b) + 1$ при $p \neq 2$;
(в) $\nu_p(a^k - b^k) = \nu_p(a - b) + \nu_p(k)$ для любого натурального k при $p \neq 2$;
(г) решите пункты б) и в) при $p = 2$.

2. Докажите, что если p — простое число, то $2^p + 3^p$ не может быть точной степенью натурального числа, отличной от первой.

3. **(а)** Докажите, что показатель 2 по модулю 3^n равен $\varphi(3^n)$.
(б) Найдите показатель числа 1001 по модулю 2^{1001}.

4. Решите уравнение $3^x = 2^x \cdot y + 1$ в натуральных числах.

5. Найдите все натуральные n такие, что $(n+1)^{n!} - 1$ делится на n^3.

6. Найдите все такие натуральные n, что при некоторых взаимно простых x и y и натуральном $k > 1$ выполняется равенство $3^n = x^k + y^k$.

7. На сколько нулей заканчивается число $4^{5^6} + 6^{5^4}$?

8. Докажите, что не существует натурального $a < 10^{10}$ такого, что число $a^{2022} - 1$ представимо в виде произведения 50 последовательных натуральных чисел.

9. Докажите, что уравнение $a^n + b^n = c^n$ не имеет решений в натуральных числах для любого натурального $n > 2$ при $a, b, c \leqslant n$.