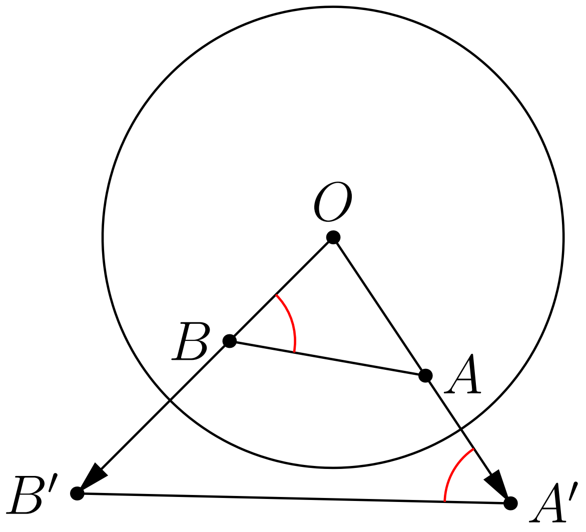
Инверсия, знакомство

Определение. *Инверсией* с центром в точке O и радиусом R называется преобразование, которое каждую точку A, отличную от O, переводит в точку A' на луче OA такую, что $OA \cdot OA' = R^2$.



1. Докажите, что при инверсии с центром в точке O
(а) прямая, проходящая через O, переходит в себя;
(б) окружность, проходящая через O, переходит в прямую, не проходящую через O, и, наоборот, прямая, не проходящая через O, переходит в окружность, проходящую через O;
(в) окружность, не проходящая через O, переходит в окружность, не проходящую через O.

2. Докажите, что при инверсии касающиеся окружности (прямая и окружность) переходят в касающиеся окружности, или в касающиеся окружность и прямую, или в пару параллельных прямых.

3. **(а)** При инверсии относительно окружности радиуса R с центром O точки A и B переходят в точки A' и B' соответственно. Докажите, что $A'B' = \dfrac{R^2}{OA \cdot OB} AB$.

(б) **Неравенство Птолемея.** Докажите, что для любых точек A, B, C, D верно неравенство $AB \cdot CD + BC \cdot DA \geqslant AC \cdot BD$. В каком случае оно обращается в равенство?

4. Через точку A к окружности ω с центром в точке O проведены касательные AX и AY, а также секущая, пересекающая окружность в точках B и C. Докажите, что точки B, C, O и середина отрезка XY лежат на одной окружности.

5. Пусть p — полупериметр треугольника ABC. Точки E и F на прямой BC таковы, что $AE = AF = p$. Докажите, что окружность (AEF) касается A-вневписанной окружности треугольника ABC.

6. На плоскости взяты шесть точек A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3. Докажите, что если окружности $(A_1A_2B_3)$, $(A_1B_2A_3)$ и $(B_1A_2A_3)$ проходят через одну точку, то и описанные окружности треугольников $(B_1B_2A_3)$, $(B_1A_2B_3)$ и $(A_1B_2B_3)$ пересекаются в одной точке.

7. В полуокружность ω, стягиваемую диаметром PQ, вписана окружность, касающаяся диаметра в точке C. Точки A на ω и B на отрезке PQ таковы, что AB касается окружности и $AB \perp PQ$. Докажите, что CA — биссектриса угла BAP.